

Universidade de Lisboa  
Faculdade de Ciências  
Departamento de Engenharia Geográfica, Geofísica e Energia



# Variação temporal das principais constituintes harmónicas da maré de Cascais

---

**Joana Rocha Pires Mendes Godinho**

Mestrado em Engenharia Geográfica

2011



Universidade de Lisboa  
Faculdade de Ciências  
Departamento de Engenharia Geográfica, Geofísica e Energia



# Variação temporal das principais constituintes harmónicas da maré de Cascais

---

**Joana Rocha Pires Mendes Godinho**

Orientador: Carlos Manuel Correia Antunes

Mestrado em Engenharia Geográfica

2011

## Resumo

A modelação da maré tem sido alvo de vários estudos no sentido de obter modelos mais exactos e precisos. O método mais comum e actual de modelar a maré é a análise harmónica. Esta modela a componente astronómica de maré, pelo que fora da análise harmónica temos de modelar todos os factores que não são astronómicos. Na análise harmónica, a maré é representada pelo somatório de sinusóides – constituintes harmónicas. As constituintes estão relacionadas com o efeito que as órbitas dos astros (Sol e Lua) produzem na superfície oceânica. Com este método determinamos a amplitude e fase destas constituintes para modelar a componente astronómica da maré.

Existem diversos factores que perturbam a oscilação periódica de origem astronómica, mas apenas foi estudado o forçamento atmosférico – variação de pressão atmosférica e o efeito do vento. Neste trabalho, analisámos a possibilidade de modelar o forçamento atmosférico usando a análise espectral e desenvolvemos uma metodologia que permite modelar os efeitos atmosféricos sem recorrer a valores de pressão atmosférica observada.

Pretendemos realizar um estudo durante um período de cerca de 40 anos. O objecto em estudo são as séries anuais de alturas horárias de maré desde 1970 a 2007 obtidas pelo marégrafo de Cascais. A modelação da maré durante um período tão grande permite avaliar alterações que ocorram nos elementos que ajudam a modelar a componente astronómica da maré, as constituintes harmónicas. O estudo realizado teve em conta apenas as constituintes principais, de maior amplitude,  $M_2$  e  $S_2$ . Para estas constituintes verificamos que as amplitudes estão a aumentar e as fases a diminuir.

Palavras-Chave: análise harmónica; análise espectral; forçamento atmosférico; variação temporal de constituintes harmónicas.

## Índice

Resumo .....	i
Índice de figuras.....	iii
Índice de tabelas.....	v
1. Introdução .....	1
1.1. Pesquisa bibliográfica .....	2
1.2. Objectivos .....	4
1.3. Organização .....	4
2. Enquadramento teórico .....	6
2.1. Teoria geral.....	6
2.1.1. Método dos mínimos quadrados .....	7
2.1.2. Análise espectral.....	10
2.2. Teoria específica.....	13
2.2.1. Potencial de maré.....	15
2.2.2. Maré de equilíbrio .....	20
2.2.3. Forçamento atmosférico .....	25
2.2.4. Análise harmónica .....	29
2.2.5. Análise espectral aplicada a séries de alturas de maré .....	33
3. Processamento de dados.....	35
3.1. Metodologias para remover os efeitos atmosféricos.....	37
3.1.1. Correção dos efeitos atmosféricos usando dois modelos numéricos .....	38
3.1.2. Correção conjunta dos efeitos atmosféricos por via da análise espectral.....	42
3.1.3. Escolha da metodologia .....	46
3.2. Metodologia aplicada a todas as séries .....	51
4. Resultados .....	54
5. Conclusão .....	60
Referências bibliográficas .....	63
Apêndices .....	65
A. Efeitos das várias correções no ajustamento.....	65
B. Efeitos da correção única no ajustamento.....	65
C. Resultados obtidos no processamento .....	66
D. Velocidades de $M_2$ e $S_2$ .....	69
E. Ajustamento da série de 2007 com uma falha.....	70
F. Ajustamento de uma série com 50 dias de 2007.....	70

## Índice de figuras

Figura 1 – Dois sinais com a mesma amostragem (pontos representados a preto). ....	11
Figura 2 – a) Espectro da série temporal de alturas horárias de maré de 2007 à qual foram retirados os últimos onze dados do ano; b) Espectro da mesma série que estava completa. ...	12
Figura 3 – Altura e elevação de maré em relação ao respectivo plano de referência. ....	13
Figura 4 – Maré observada no dia 15 de Janeiro de 2007. ....	14
Figura 5 – Alturas de maré registadas nos primeiros 28 dias de Janeiro de 2007. ....	15
Figura 6 – Localização do ponto A na superfície da Terra (adaptado de Torge, 2001). ....	16
Figura 7 – a) Representação do sistema equatorial e b) projecção no plano do Equador. ....	18
Figura 8 – Centro de massa do sistema Terra – Lua (adaptado de Davis e FitzGerald, 2004). ....	20
Figura 9 – Actuação das forças gravítica e centrífuga da Lua em pontos à superfície da Terra (adaptado de Davis e FitzGerald, 2004). ....	21
Figura 10 – Maré gerada na superfície da Terra pelas forças gravitacional e centrífuga da Lua (adaptado de Davis e FitzGerald, 2004). ....	22
Figura 11 – Origem das marés vivas e marés mortas (adaptado de Pinet, 2000). ....	23
Figura 12 – Combinação das constituintes $M_2$ e $S_2$ nos períodos de a) marés vivas e b) marés mortas. ....	24
Figura 13 – Altura de maré e fases da Lua em Agosto de 2011 (adaptado de <a href="http://wepages.fc.ul.pt/~cmantunes/hidrografia/hidro-mares.html">http://wepages.fc.ul.pt/~cmantunes/hidrografia/hidro-mares.html</a> , 2011). ....	25
Figura 14 – Relação do efeito do vento com a variação de pressão e o efeito na superfície do mar. ....	26
Figura 15 – a) Correntes provocadas por um vento persistente; b) Transporte de Ekman (adaptado de Pinet, 2000). ....	27
Figura 16 – Circulação de Langmuir (adaptado de Pinet, 2000). ....	28
Figura 17 – Variação sazonal média (linha azul) entre 1990 e 1995 e modelo do efeito conjunto da variação sazonal e da constituinte SA (linha vermelha). ....	32
Figura 18 – Grupos de constituintes identificadas no espectro da série de alturas de maré de 2007. ....	33
Figura 19 – Filtro (a vermelho) aplicado ao espectro da série de alturas de maré de 2007 (a azul). ....	34
Figura 20 – Resíduos obtidos no ajustamento da série de 2007 sem remover a SA mas corrigindo dos efeitos atmosféricos. ....	36
Figura 21 – Resíduos obtidos no ajustamento da série de 2007 sem efectuar qualquer correcção. ....	36
Figura 22 – Resíduos obtidos no ajustamento da série de 2007 removendo a SA antes do processamento. ....	37
Figura 23 – Metodologia seguida na correcção das alturas de maré usando dois modelos. ....	38
Figura 24 – Resíduos obtidos no ajustamento após a correcção do EBI. ....	39
Figura 25 – Resíduos obtidos no ajustamento após as correcções. ....	39

Figura 26 – Histograma dos resíduos obtidos no ajustamento final ao qual se sobrepõe a curva de Gauss com valor médio e desvio-padrão dos resíduos (0,000007 e 0,021). .....	40
Figura 27 – Histograma dos resíduos obtidos no ajustamento sem efectuar qualquer correcção ao qual se sobrepõe a curva de Gauss com valor médio e desvio-padrão dos resíduos (-0,000001 e 0,079). .....	41
Figura 28 – Polígono de frequências acumuladas da distribuição normal (vermelho) e a) distribuição de resíduos sem efectuar qualquer correcção; b) distribuição de resíduos no ajustamento final.....	42
Figura 29 – Metodologia seguida na correcção das alturas de maré usando um modelo. ....	43
Figura 30 – Resíduos obtidos no ajustamento da série de 2007 após a correcção do efeito atmosférico, sem ter removido a SA. ....	44
Figura 31 – Resíduos obtidos no ajustamento da série de 2007 após a correcção do efeito atmosférico, removendo a SA previamente. ....	44
Figura 32 – Histograma dos resíduos obtidos no ajustamento final ao qual se sobrepõe a curva de Gauss com valor médio e desvio-padrão dos resíduos (0,000001 e 0,042). ....	45
Figura 33 – Polígono de frequências acumuladas da distribuição normal (vermelho) e distribuição de resíduos obtidos no ajustamento (azul). ....	46
Figura 34 – Resíduos obtidos após o processamento da série de 2007 à qual foi removida uma observação. ....	47
Figura 35 – Resíduos obtidos após o processamento da série que contém os primeiros 50 dias de 2007. ....	47
Figura 36 – Correcção do EBI e correcção conjunta dos efeitos atmosféricos obtidas nas duas metodologias. ....	49
Figura 37 – Correcção do efeito conjunto (vermelho) e soma das correcções do EBI e modelo numérico residual (azul). ....	49
Figura 38 – Diagrama de dispersão das duas correcções efectuadas.....	50
Figura 39 – Resíduos obtidos na série de 2007 usando valores sintéticos de pressão. ....	51
Figura 40 – Metodologia aplicada a todas as séries de alturas de maré. ....	53
Figura 41 – Amplitude de $M_2$ entre 1970 e 2007.....	55
Figura 42 – Fase de $M_2$ entre 1970 e 2007.....	55
Figura 43 – Amplitude de $S_2$ entre 1970 e 2007.....	56
Figura 44 – Fase de $S_2$ entre 1970 e 2007. ....	56
Figura 45 – Amplitude de $M_2$ com linha de tendência, após a remoção de <i>outliers</i> . ....	57
Figura 46 – Fase de $M_2$ com linha de tendência, após a remoção de <i>outliers</i> . ....	58
Figura 47 – Amplitude de $S_2$ com linha de tendência, após a remoção de <i>outliers</i> . ....	58
Figura 48 – Fase de $S_2$ com linha de tendência, após a remoção de <i>outliers</i> . ....	58

## Índice de tabelas

Tabela 1 – EMQ do ajustamento, resíduos máximo e mínimo e constantes harmónicas de $M_2$ e $S_2$ obtidos nas duas metodologias.....	48
Tabela 2 – EMQ do ajustamento, resíduos máximo e mínimo quando se efectua apenas a correcção do EBI e a correcção conjunta dos efeitos. ....	48
Tabela 3 – EMQ do ajustamento, resíduos máximo e mínimo e constantes harmónicas de $M_2$ e $S_2$ usando ou não a pressão atmosférica observada. ....	52
Tabela 4 – Amplitude interquartis, barreira inferior e barreira superior para a amplitude e fase de $M_2$ e $S_2$ . ....	57
Tabela 5 – Coeficientes de correlação entre os anos e a amplitude ou fase de $M_2$ e $S_2$ . ....	59



## 1. Introdução

A Hidrografia é a ciência que mede e descreve as características do mar. A maré é uma oscilação periódica do nível do mar que se deve sobretudo à atracção gravitacional da Lua e do Sol e a alterações provocadas pela influência do vento e da pressão atmosférica. As alterações do nível do mar provocadas pelas acções da Lua e do Sol formam um padrão regular e previsível (periódico) designado por componente astronómica da maré. A onda de maré gerada pelas forças centrífuga e gravitacionais da Lua e do Sol é modificada por factores não regulares como a profundidade da massa de água, a linha costeira e o forçamento atmosférico. A maré de equilíbrio é uma maré teórica que nos ajuda a estudar o comportamento da superfície hidrográfica da Terra uma vez que esta está sujeita a forças externas devidas ao Sol e à Lua. A maré de equilíbrio é transformada na maré local quando esta é modificada devido a efeitos locais. Estes efeitos alteram a amplitude e a fase de cada onda que constitui a onda de maré, pelo que são os parâmetros que pretendemos determinar quando efectuamos uma análise harmónica de maré. A amplitude e fase de cada onda são designadas por constantes harmónicas e cada onda que constitui a onda de maré é uma constituinte harmónica.

A análise da maré tem vários objectivos como a previsão rigorosa do nível do mar, uma ajuda nas operações de navios em zonas costeiras e a compreensão da hidrodinâmica dos oceanos e as suas respostas ao forçamento da maré (Pugh, 2004). Assim, pretendemos determinar parâmetros que, de forma estável no tempo, descrevam o regime da maré para um dado local. Neste trabalho pretendemos analisar a variação temporal das principais constituintes da maré de Cascais. As principais constituintes são  $M_2$  e  $S_2$ , assim designadas por serem as de maior amplitude e de período que corresponde a metade do dia lunar (semi-diurno). Dado que a Lua e o Sol são os corpos mais próximos da Terra, estas duas constituintes referem-se às órbitas e forças criadas por estes astros, sendo  $M_2$  referente à Lua e  $S_2$  ao Sol.

Na análise de maré é necessário efectuar medições, principal tarefa do hidrógrafo, de forma a produzir registos da profundidade instantânea do mar. Com estas medições podemos obter alturas do mar, elevações do mar ou sondas, que diferem sobretudo no plano de referência. Existem vários métodos e equipamentos que se podem utilizar para realizar essas medições como o fio-de-prumo ou sondadores acústicos. Quando pretendemos obter uma série temporal de registos da profundidade do mar para um determinado local é necessário que o equipamento utilizado efectue as medições para que estas sejam realizadas nas mesmas condições. Os marégrafos contêm equipamento que efectua medições e registo analógico ou digital dos dados. A análise da maré tem como base estes registos. Numa série temporal de

dados podemos modelar a onda de maré que permite realizar diversos estudos com os objectivos acima descritos.

A análise harmónica é um método que permite determinar as constituintes harmónicas. Neste método, a modelação da onda de maré é feita através de um somatório de sinusóides. Cada sinusóide representa uma constituinte harmónica que é caracterizada por um período, uma amplitude e uma fase. O período de cada constituinte é conhecido pelo que temos apenas de determinar a sua amplitude e fase, designadas por constantes harmónicas. Quando calculamos as constantes harmónicas para cada constituinte, caracterizamos os vários movimentos do sistema Terra – Lua – Sol, que têm períodos desde a fracção do dia até 18,6 anos (período correspondente à regressão dos nodos lunares – nutação astronómica). As constituintes que se devem ao efeito da Lua são afectadas pelo ciclo lunar de 18,6 anos e algumas devido ao ciclo de 8,5 anos (perigeu). Na modelação destes efeitos lentos utilizamos as correcções nodais que afectam apenas as constituintes de origem lunar. Para determinar as constantes harmónicas usamos o MMQ (Método dos Mínimos Quadrados). Das várias constituintes conhecidas apenas se utilizam algumas para a modelação da onda de maré.

Quando utilizamos a análise harmónica, a série que contém os registos das alturas de maré observada deve conter apenas a maré de origem astronómica para modelar uma vez que esta representa um movimento periódico, ou seja, os registos devem estar isentos de factores não periódicos. Assim, as alturas de maré devem ser corrigidas dos efeitos não astronómicos. Os resultados obtidos pela análise harmónica serão tanto mais precisos quanto melhor for o modelo das componentes não periódicas, no sentido harmónico, removido da série original das alturas de maré.

## **1.1. Pesquisa bibliográfica**

Durante este trabalho vamos utilizar expressões como “maré” e “onda de maré”. Ao utilizarmos a expressão “onda de maré” referimo-nos ao modelo físico/matemático do mar. A “maré” refere-se ao nível da água.

O principal objectivo da análise harmónica é determinar parâmetros estáveis no tempo de forma a descrever o regime de marés no local onde são realizadas as observações. Estes parâmetros, designados por constantes harmónicas são assim referidos pois a resposta do mar às forças geradoras de maré são consideradas constantes ao longo de um ano.

Na análise de maré apenas consideramos o forçamento atmosférico: variação de pressão atmosférica e efeito do vento. Apesar de existirem outros factores que alteram a onda de maré

consideramos apenas estes por serem modeláveis e produzirem resultados aceitáveis para o estudo que estamos a realizar.

Em Portugal, várias entidades analisam a maré como o Instituto Hidrográfico ou a FCUL. Na bibliografia pesquisada consta um trabalho realizado por Martins e Reis (2007) onde refere a análise espectral na análise de maré. O artigo de Antunes (2010), mais direccionado à variação do nível médio do mar, sugere algumas estratégias para melhorar a precisão dos resultados como a modelação da SA (Solar Anual) fora da análise harmónica. A SA é modelada em conjunto com a componente sazonal, de forma muito rudimentar, pois apenas pretendemos melhorar a modelação no geral para obter valores mais exactos para as constituintes  $M_2$  e  $S_2$ . Em Antunes e Godinho (2011) são referidas algumas estratégias aplicadas neste trabalho como a utilização de filtros na análise espectral para modelar a componente astronómica da maré.

Foreman, Cherniawsky e Ballantyne (2009) avaliam uma nova metodologia onde aplica uma mudança de variável que transforma a análise harmónica. Esta mudança de variável permite que, através do MMQ, as soluções converjam mais rápido. Desta nova metodologia apenas usámos no nosso trabalho a mudança de variável proposta, uma vez que um dos problemas do programa que estava a ser utilizado no DEGGE (Departamento de Engenharia Geográfica, Geofísica e Energia), *harm.for*, era o da lenta convergência para a solução.

Na análise harmónica é necessário definir as constituintes que serão utilizadas na modelação da onda de maré. Foreman *et al.* (2009), usa o critério de Rayleigh para determinar as constituintes que modelam a maré. Pawlowicz, Beardsley e Lentz (2002) usa os números de Doodson na análise harmónica. Neste trabalho, usamos um critério em que as constantes a utilizar no modelo são as de maior influência.

Podemos ver o tema do potencial de maré desenvolvido em Antunes (2006), Pugh (1996) e Marchuk e Kagan (1989). Apesar de na maior parte da bibliografia consultada o potencial gravítico lunar ter sinal positivo optámos por usar o sinal negativo, como Pugh (1996), uma vez que matematicamente é mais correcto. Segundo Pugh (1996), a utilização da equação (14) com sinal positivo, normalmente em Geodesia, tem a vantagem de que um aumento do potencial na superfície da Terra resulta no aumento do nível da superfície livre da água.

Em muita bibliografia encontramos informação sobre os tipos de maré, características da maré, forças geradoras de maré e maré de equilíbrio. Tanto Davis e FitzGerald (2004) como Pinet (2000) estudam, com algum detalhe, o sistema Terra – Lua – Sol de forma a compreender o comportamento da superfície da Terra às forças geradoras de maré. O Manual de Hidrografia (OHI, 2005) também faz o mesmo estudo. Verificamos que o estudo deste sistema é de fácil compreensão quando, previamente se separa em dois subsistemas: Terra – Lua e Terra – Sol. O estudo de um subsistema apenas com dois corpos torna desnecessário o estudo do outro

pois apenas existem duas diferenças: a intensidade da força exercida pelo Sol é inferior à da Lua e a Terra gira em torno do Sol. Só depois de compreender o sistema Terra – Lua é que podemos compreender o sistema Terra – Lua – Sol. Esta foi também a metodologia seguida no trabalho. Damos mais importância ao sistema Terra – Lua pois a força geradora exercida pela Lua é superior à força exercida pelo Sol.

Em relação ao forçamento atmosférico, encontramos em Davis e FitzGerald (2004), Pinet (2000), Pugh (1996) e Darwin (2005) referências ao efeito da pressão atmosférica e do vento na maré. Mas nas duas primeiras referências este tema é desenvolvido de forma bastante acessível.

## **1.2. Objectivos**

Um dos objectivos deste trabalho é melhorar a metodologia que tem sido aplicada no DEGGE, no sentido de torná-la mais eficiente e precisa. Ao tornar o programa mais eficiente poderemos então realizar um estudo temporal da maré, que até então seria quase impossível. Se o programa é mais eficiente não quer dizer que os resultados são mais precisos. Assim, é preciso definir as componentes que queremos modelar e quais as que são utilizadas pelo programa. Para efectuar a análise da maré consideramos apenas os factores astronómicos e os meteorológicos: vento e pressão atmosférica.

Na análise harmónica apenas podemos considerar a componente astronómica da maré. Assim, temos de modelar a componente não astronómica fora do programa. Uma vez que o DEGGE já utilizava uma metodologia para este efeito, usámos a análise espectral para estimar a componente atmosférica. A comparação dos resultados obtidos nestas duas metodologias servirá para definir a metodologia que melhor se aplica a várias séries de alturas de maré.

O estudo incide sobre as séries anuais de alturas horárias de maré no período de 1970 a 2007. Estes registos anuais foram obtidos nos marégrafos de Cascais, os mais recentes, a partir de 2004 foram obtidos no novo marégrafo. Com o processamento destas séries pretendemos estudar a variação das constantes harmónicas, amplitude e fase, das principais constituintes harmónicas:  $M_2$  e  $S_2$ .

## **1.3. Organização**

O trabalho realizado desenvolve-se em cinco capítulos. O primeiro capítulo, no qual nos encontramos, tem por finalidade enquadrar o trabalho realizado na área de Hidrografia, dando

uma ideia geral dos vários assuntos que vamos desenvolver mais à frente. Na pesquisa efectuada encontrámos por vezes diversos autores a desenvolver o mesmo tema pelo que mostramos as opções tomadas na abordagem a seguir. Neste subcapítulo fazemos uma síntese do trabalho desenvolvido pelos autores apenas quando desenvolvem temas da área de Hidrografia. Explicitamos ainda os objectivos deste trabalho bem como a sua organização.

No segundo capítulo, desenvolvemos a teoria que está subjacente ao tema que estamos a desenvolver. Uma vez que parte da teoria se aplica a outras áreas, optámos por dividir este capítulo em dois: teoria geral e teoria específica. Na teoria geral desenvolvemos a aplicação do MMQ na determinação de um modelo através de observações e a análise espectral aplicada a um sinal, onde também são referidos os erros associados a esta. Na teoria específica foram desenvolvidos assuntos relacionados com a parte física da maré, factores geradores ou que influenciam a maré: potencial de maré, maré de equilíbrio e forçamento atmosférico e factores relacionados com a parte matemática: análise harmónica de maré utilizada na modelação da onda de maré e a análise espectral aplicada a uma série de alturas de maré, utilizada na identificação de constituintes harmónicas ou na modelação dos efeitos atmosféricos através da aplicação de filtros.

No terceiro capítulo descrevemos as duas metodologias estudadas para modelar a componente atmosférica da maré, que neste trabalho considerámos como sendo o efeito da variação da pressão atmosférica e o efeito do vento. Numa metodologia, as correcções a efectuar à maré observada são modeladas separadamente e na outra modelámos o efeito conjunto. Através destas definimos um método que permitiu corrigir todas as séries de alturas de maré dos efeitos não astronómicos.

Os resultados obtidos no processamento das séries anuais de alturas de maré são apresentados no quarto capítulo. Numa primeira análise, verificámos a existência de valores anormais para as constantes harmónicas (amplitude e fase) das constituintes  $M_2$  e  $S_2$ . Assim, antes de passarmos ao capítulo seguinte, removemos estes valores uma vez que estariam a enviesar os resultados.

No capítulo cinco vamos discutir os resultados obtidos e compará-los com um estudo realizado por outro autor sobre a variação de algumas constantes. Finalmente, vamos tirar conclusões sobre o trabalho realizado tendo em conta os objectivos propostos.

## 2. Enquadramento teórico

A teoria que está por detrás deste trabalho pode dividir-se na teoria geral que é aplicável a outras áreas, que não a da Hidrografia, e a teoria específica, que está directamente relacionada com esta área. Dentro da teoria geral vamos analisar um método de análise numérica, o MMQ, usado na resolução de sistemas de equações lineares e a análise espectral que permite trabalhar com dados no domínio espectral, o domínio das frequências. Na teoria específica vamos desenvolver alguns temas relacionados com a componente física da maré à qual associamos a parte matemática. Neste subcapítulo vamos relacionar o potencial de maré com a força geradora de maré e a teoria da maré de equilíbrio. Esta teoria, juntamente com o forçamento atmosférico, ajuda a compreender os factores que afectam ou que geram a onda de maré. A análise harmónica é um método que permite modelar matematicamente a onda de maré através de um somatório de funções sinusoidais. Pela análise espectral aplicada a uma série anual de alturas horárias de maré podemos analisar a maré observada através de frequências. Estas frequências permitem identificar as constituintes que mais contribuem para a maré observada. Neste trabalho, a análise espectral foi também utilizada para determinar a componente não harmónica de maré com o objectivo de corrigir a maré observada dessa componente.

### 2.1. Teoria geral

A realização deste trabalho envolveu métodos que podem ser aplicados noutras áreas. O MMQ que aqui foi utilizado para resolver sistemas de equações lineares pode aplicar-se também a outras áreas como a Geodesia ou Topografia. A análise espectral está normalmente associada a sinais eléctricos ou acústicos. Estes sinais são caracterizados por serem periódicos, tal como os dados registados por um marégrafo numa zona costeira.

Para efectuar uma análise precisa de uma série temporal de maré usámos a análise harmónica. Através do MMQ determinamos as constantes harmónicas das constituintes usadas para modelar a componente astronómica da maré, bem como a precisão destas constantes. Antes de aplicar o MMQ é necessário calcular, a partir das alturas de maré, a componente astronómica de maré. Para isso é necessário corrigir as observações dos efeitos não harmónicos. Um dos processos utilizados para efectuar esta correcção usa a análise espectral.

### 2.1.1. Método dos mínimos quadrados

Com a teoria da aproximação podemos resolver dois tipos de problemas. No primeiro, conhecemos uma dada função e pretendemos encontrar uma função mais simples, como a polinomial, com a qual determinamos valores aproximados para essa nova função. No segundo tipo, temos pontos e queremos determinar a função que melhor se lhes ajusta (Burden e Faires, 1993).

No nosso caso, partimos de uma série de dados observados, designados a seguir por observações, e pretendemos determinar a função que melhor se ajusta a estes. A função que procuramos não coincidirá em todos os pontos mas pretendemos que a soma dos quadrados das diferenças entre os valores observados e estimados, os resíduos, seja mínima.

Pretendemos definir uma função que pode ser determinada por um número mínimo de parâmetros,  $n_0$ . As observações têm que ser independentes de forma a nenhuma poder ser obtida através de outras. Se o número de observações independentes,  $n$ , for inferior a  $n_0$ , o modelo não fica bem definido. Quando o número de observações é superior a  $n_0$  dizemos que existe redundância,  $r$ , e torna-se necessário efectuar um ajustamento de modo a obter uma solução única dos parâmetros que serão utilizados para modelar as observações.

$$r = n - n_0 \quad (1)$$

Estatisticamente, a redundância definida em (1) é o mesmo que o número de graus de liberdade do sistema de equações que define a função. Para podermos definir a função que melhor se ajusta às observações é necessário que o número de observações seja não inferior a  $n_0$ .

O modelo funcional que estabelece a relação matemática entre o vector que contém as observações,  $\vec{l}_t$  e o vector que contém os valores calculados,  $\vec{x}_t$ , ambos de dimensão  $n$ , tem a forma

$$F(\vec{x}_t, \vec{l}_t) = 0 \quad (2)$$

Usando o método paramétrico (variação dos parâmetros com funções de observação) obtemos a condição

$$f(\vec{x}_t) = \vec{l}_t \quad (3)$$

Ao utilizar o MMQ como estimador obtemos um modelo funcional de estimativa

$$f(\hat{\vec{x}}_t) = \hat{\vec{l}}_t \quad (4)$$

sendo  $\hat{\vec{x}} = \vec{x}_0 + \vec{\delta}$ , em que  $\hat{\vec{x}}$  é vector dos parâmetros estimados,  $\vec{x}_0$  é o vector dos parâmetros iniciais e  $\vec{\delta}$  é o vector que representa os erros de estimativa obtido pelo MMQ. Para facilitar a leitura das fórmulas que a seguir desenvolveremos, vamos representar os vectores atrás

referidos apenas por  $\hat{x}$ , vector dos parâmetros estimados,  $x_0$ , vector dos parâmetros iniciais e  $\delta$ , o vector dos erros de estimativa.

A função  $F$ , em (2), não é linear. Para usarmos o MMQ temos de linearizá-la. Usando a condição (4) transformamos (2) na condição

$$F(\hat{x}, \hat{l}) = f(\hat{x}) - \hat{l} = 0 \quad (5)$$

O desenvolvimento de  $F(\hat{x}, \hat{l})$  em série de Taylor em torno de  $(x_0, l_0)$  é dado por

$$0 = F(\hat{x}, \hat{l}) = F(x_0, l_0) + \left(\frac{dF}{dx}\right)_{x_0} (\hat{x} - x_0) + \left(\frac{dF}{dl}\right)_{l_0} (\hat{l} - l_0) + \dots \quad (6)$$

onde eliminamos os termos seguintes, de ordem igual ou superior a dois, para obter a função linearizada

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_{x_0} (\hat{x} - x_0) + f(x_0) - l_0 - (\hat{l} - l_0) = 0 \quad (7)$$

que podemos escrever matricialmente na forma

$$A\hat{\delta} - W = \hat{v} \quad (8)$$

onde  $W = l_0 - f(x_0)$  é designado por vector fecho,  $\hat{\delta} = \hat{x} - x_0$  é o vector das correcções aos parâmetros iniciais,  $\hat{v} = \hat{l} - l_0$  é o vector dos resíduos dos valores observados e  $A$  é a matriz jacobiana de  $f(x)$ .

O sistema de equações linearizadas em (8) é resolvido pelo MMQ, na condição do vector dos resíduos, estimativa dos erros das observações, ser uma variável normal centrada ( $\bar{v} = 0$ ). Para que tal aconteça é necessário remover das observações os erros não aleatórios: erros grosseiros e sistemáticos. Pelo princípio dos mínimos quadrados a condição  $\Phi = v^T v = \min$  tem de verificar-se. Tal condição resulta no sistema de equações normais

$$A\hat{\delta} = W \Leftrightarrow A^T A\hat{\delta} = A^T W \quad (9)$$

Utilizamos o método de eliminação de Gauss para inverter a matriz  $N = A^T A$ , matriz definida positiva. Este método usa como elemento de redução, o inverso dos elementos da diagonal. Assim, a primeira condição a verificar é se todos os elementos da diagonal de  $N$  são não nulos. Após esta verificação decomponemos a matriz  $N$  num produto de uma matriz triangular inferior,  $L$ , com o valor 1 na sua diagonal, por uma matriz triangular superior,  $U$ . Esta é a decomposição de Crout.

$$N = LU \quad (10)$$

Esta decomposição facilita o cálculo da inversa de  $AN$ , pelo que uma vez determinada se obtém a solução, que é a correcção dos parâmetros iniciais  $(x_0, l_0)$ ,

$$\hat{\delta} = (A^T A)^{-1} A^T W \quad (11)$$



O vector de resíduos é determinado através do sistema de equações linearizadas da condição (8). Calculamos a variância de referência *a posteriori* usando a equação

$$\hat{\sigma}_0^2 = \sum_{i=1}^n \frac{v_i^2}{n-q} \quad (12)$$

onde q é o número de parâmetros que pretendemos determinar e n-q é o número de graus de liberdade do sistema de equações lineares (8).

No final do ajustamento estudamos a qualidade do estimador utilizado, através da precisão e exactidão. Um bom estimador é caracterizado pela ausência de erros sistemáticos e por ter “precisão suficiente” (Dagnelis, 1973). A precisão do estimador dá-nos o grau de conformidade das estimativas relativamente à média destas. Para determinar a precisão dos parâmetros estimados calculamos o desvio-padrão de cada um. Verificamos a ausência de erros sistemáticos determinando a proximidade do valor estimado com o valor real – exactidão do estimador. Segundo Mikhail (1976), a medida de exactidão do estimador é o EMQ (Erro Médio Quadrático)

$$\text{EMQ} = \sigma^2 + \text{enviesamento}^2 \quad (13)$$

Como partimos do pressuposto que o nosso estimador não é enviesado, o EMQ é a variância. Depois de determinada as variâncias de referência, *a priori* e *a posteriori*, efectuamos um teste da razão das variâncias através do teste de  $\chi^2$ . Partimos da hipótese nula de que a variância de referência *a priori* é estatisticamente igual à variância de referência *a posteriori* ( $H_0: \sigma_0^2 = \hat{\sigma}_0^2$ ). A outra hipótese indica-nos que as observações estão piores do que o suposto, sendo a variância *a posteriori* estatisticamente superior à variância *a priori* ( $H_0: \sigma_0^2 < \hat{\sigma}_0^2$ ). Rejeitamos a hipótese nula, com 95% de confiança, se  $\chi_{n-q}^2 > \chi_{95\%, n-q}^2$ , sendo  $\chi_{n-q}^2 = \frac{(n-q)\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2}$ .

Uma vez que trabalhamos com amostras podemos falsear a conclusão que tiramos deste teste. Assim, existem quatro situações que podem ocorrer:

- Aceitar a hipótese nula,  $H_0$ , sendo esta verdadeira.
- Rejeitar a hipótese nula,  $H_0$ , sendo esta verdadeira.
- Aceitar a hipótese nula,  $H_0$ , sendo esta falsa.
- Rejeitar a hipótese nula,  $H_0$ , sendo esta falsa.

Na primeira e última situações, as conclusões obtidas estão correctas. Na segunda situação, estamos perante um erro de tipo I com uma probabilidade de  $\alpha = 5\%$  (nível de significância do teste). Na terceira situação estamos perante um erro de tipo II com uma probabilidade  $\beta$ , sendo  $1 - \beta$  designado por potência do teste. Pretendemos que tanto  $\alpha$  como  $\beta$  tenham o menor valor

possível. Assim, temos de arranjar um equilíbrio entre  $\alpha$  e  $\beta$  pois se um aumenta o outro diminui.

Como referimos acima, o MMQ é aplicado na condição do vector dos resíduos ser uma variável normal centrada. Esta condição é verificada se as observações estiverem isentas de erros sistemáticos. Assim, a aplicação do teste de normalidade aos resíduos obtidos no ajustamento tem como objectivo verificar se a distribuição destes resíduos segue a distribuição normal para podermos tirar conclusões sobre a ausência, ou não, de erros sistemáticos nas observações.

### 2.1.2. Análise espectral

A análise espectral permite detectar sinais sinusoidais que se confundem com o ruído de uma série de dados ou isolar bandas de frequências por aplicação de filtros no domínio espectral. Uma série temporal de dados é transformada para o domínio espectral de forma a obter, para cada frequência, a amplitude/potência do espectro. Assim, na análise espectral não trabalhamos no domínio temporal mas sim no domínio das frequências.

Um sinal é convertido para o domínio espectral utilizando a transformada de Fourier. Antes de se realizar esta conversão, o sinal contínuo tem de ser transformado num sinal discreto, obtendo uma série temporal discreta de dados. A série obtida contém os dados igualmente espaçados no tempo,  $\Delta t$ . Para converter uma série temporal discreta numa série discreta no domínio das frequências utilizamos a DFT (*Discrete Fourier Transform* – transformada discreta de Fourier).

Se a série temporal discreta for constituída por  $N$  pontos, no domínio das frequências também será constituída por  $N$  pontos igualmente espaçados na frequência,  $\Delta f = \frac{f_s}{N}$  com  $f_s$  a frequência de amostragem. Estes  $N$  pontos do domínio espectral contêm frequências positivas e negativas. No caso de a série temporal de dados ser de números reais, a respectiva série no domínio das frequências é simétrica. Estas frequências positivas e negativas são combinadas de forma a obter  $\frac{N}{2} + 1$  pontos com frequências  $0; \Delta f; 2 \times \Delta f; \dots; \frac{N}{2} \times \Delta f$ . À maior frequência calculada,  $\frac{f_s}{2}$ , chama-se frequência *Nyquist*. Segundo o teorema de amostragem de Nyquist-Shannon, um sinal que foi alvo de uma amostragem pode ser reconstruído das amostras se  $f_s > 2 \times \text{frequência do sinal original}$ . Para compreender melhor este teorema, vamos supor que um sinal é dado pela função seno, cuja frequência é  $\frac{1}{2\pi}$ . Uma vez que o sinal é contínuo, para convertê-lo no domínio espectral, temos de transformá-lo num sinal discreto através de uma amostragem. Se a frequência de amostragem for, por exemplo,  $f_s = \frac{3}{\pi}$ , o teorema de amostragem verifica-se e podemos reconstruir o sinal original a partir desta amostra. Mas se a frequência de amostragem for, por exemplo,  $f_s = \frac{3}{5\pi}$ , já não conseguimos obter o sinal original

pois o teorema de amostragem não se verifica. Neste caso, podíamos estar a trabalhar com um sinal de menor frequência.

A DFT de um vector  $x$  ( $x_0, x_1, \dots, x_{N-1}$ ) que contém a série temporal de dados é o vector  $X$  ( $X_0, X_1, \dots, X_{N-1}$ ) (Moler, 2004):

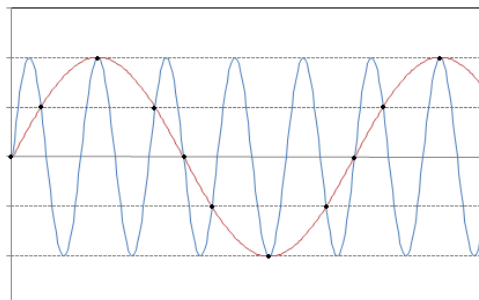
$$X_k = \sum_{j=0}^{N-1} x_j w^{jk} \quad (12)$$

onde  $w = e^{-\frac{2\pi i}{N}}$  é a N-ésima raiz complexa da unidade,  $i$  é a unidade complexa e  $N$  o número de dados. Como foi referido, os dados  $x_k$  são obtidos a intervalos de tempo constante  $\Delta t = \frac{1}{f_s}$ .

Assim, o espectro calculado é uma função periódica de período  $\omega = \frac{2\pi}{\Delta t}$ .

A FFT (*Fast Fourier Transform* – transformada rápida de Fourier) é um algoritmo que determina a DFT de forma mais rápida. Para compreender esta ideia vamos supor que, para determinar o espectro de uma série temporal de dados, o algoritmo tem de efectuar  $N$  multiplicações e  $N$  adições. A FFT consegue efectuar na ordem  $O(N \log_2 N)$  operações contra  $O(N^2)$  no caso da DFT. Em ambiente MatLab usamos a função pré-definida `fft(data)` para transformar uma série temporal no domínio espectral. Esta função usa a FFTW (*The Fastest Fourier Transform in the West*) desenvolvida por Matteo Frigo and Steven G. Johnson, segundo Moler (2004). Para que este algoritmo seja mais eficiente, o número de dados da série temporal deve ser uma potência de 2.

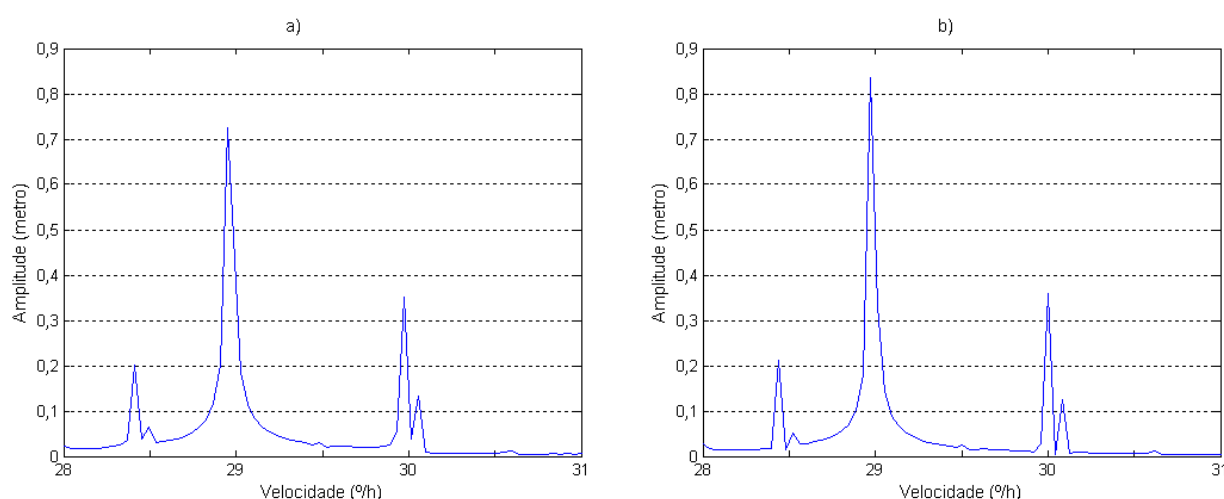
A transformação de uma série temporal de dados para o domínio espectral, usando DFT ou FFT, pode conduzir a erros: *aliasing*, *leakage* ou o efeito *picket fence*. O efeito *aliasing* ocorre quando não estamos nas condições impostas pelo teorema de amostragem de Nyquist-Shannon, ou seja, a frequência de amostragem do sinal não é superior ao dobro da maior frequência observada no sinal. Como se pode ver na Figura 1, se tivermos dois sinais diferentes, representados a azul e a vermelho e efectuarmos uma amostragem destes sinais através dos pontos a preto, verificamos que se torna impossível distinguir qual o sinal que utilizámos para realizar a amostragem. Tal impossibilita o retorno ao sinal original.



**Figura 1** – Dois sinais com a mesma amostragem (pontos representados a preto).

Este problema resolve-se tendo o cuidado de usar uma frequência de amostragem superior ao dobro da frequência do sinal original. Caso tal seja impossível, podemos utilizar filtros *anti-aliasing*. Este tipo de filtros permite filtrar as frequências superiores a metade da frequência de amostragem antes de a efectuar. O problema de *aliasing* surge quando utilizamos amostras discretas de um sinal contínuo para depois aplicar a FFT ou então quando aplicamos filtros ao sinal e pretendemos voltar para o domínio temporal após a sua aplicação. O que acontece efectivamente é que perdemos o sinal original.

O algoritmo FFT assume que a série temporal de dados observados contém um número inteiro de ciclos do sinal. Quando tal não acontece surge o *leakage*. O espectro de uma série com este erro revela um espalhamento da energia das frequências existentes no sinal para outras (Figura 2-a). Comparando as Figuras 2-a e 2-b podemos verificar o efeito que a falta de 11 dados numa série de um ano faz no espectro da série. Uma forma de reduzir este efeito é verificar se, para cada dia, temos sempre o mesmo número de observações a intervalos regulares. Caso se encontrem falhas na série devemos acrescentar zeros. Este efeito surge pois a série temporal de dados é finita.

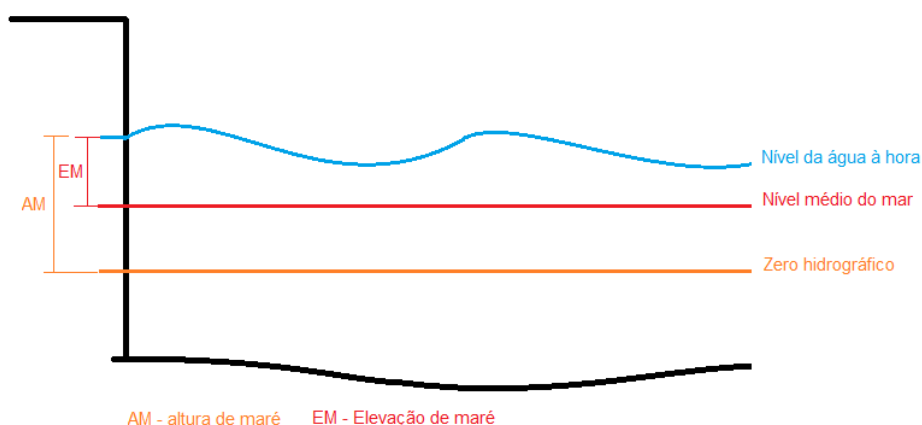


**Figura 2** – a) Espectro da série temporal de alturas horárias de maré de 2007 à qual foram retirados os últimos onze dados do ano; b) Espectro da mesma série que estava completa.

Um outro erro que ocorre é o efeito *picket fence*. A FFT determina a amplitude do sinal para as frequências  $0; \Delta f; 2 \times \Delta f; \dots; \frac{N}{2} \times \Delta f$ . Um pico para uma dada frequência pode ficar bem determinado se a sua frequência for uma das referidas atrás ou pode alterar a sua amplitude, espalhando-a pelas frequências vizinhas. Em último caso, este pico pode tornar-se indetectável. Uma forma de reduzir este efeito é acrescentar zeros no final da série temporal de dados. Ao acrescentar estes valores estamos a aumentar  $N$ , o número de dados, diminuindo, assim,  $\Delta f$ , o intervalo das frequências.

## 2.2. Teoria específica

Ao efectuar uma medição temos de ter uma referência. Quando esta medição se faz no mar podemos medir a altura de maré ou a elevação de maré, entre outras. A diferença entre estas duas medições é o plano de referência. A primeira usa o zero hidrográfico como referência e a segunda usa o nível médio do mar (Figura 3). O nível médio do mar é a superfície média do mar medida por marégrafos pertencentes à rede internacional de marégrafos e serve para determinar o datum altimétrico do país. Em Portugal, mais propriamente em Cascais, o nível médio do mar é a média dos níveis médios anuais desde 1882 a 1938 (3 ciclos nodais de 18,6 anos). O zero hidrográfico é definido, em Portugal, como a mais baixa das baixa-mar durante um dado período, superior ao ciclo lunar nodal, em relação ao nível médio do mar. Qualquer medição é realizada num determinado instante, pelo que as medições são sempre acompanhadas de um registo horário que corresponde ao instante em que foram medidas.

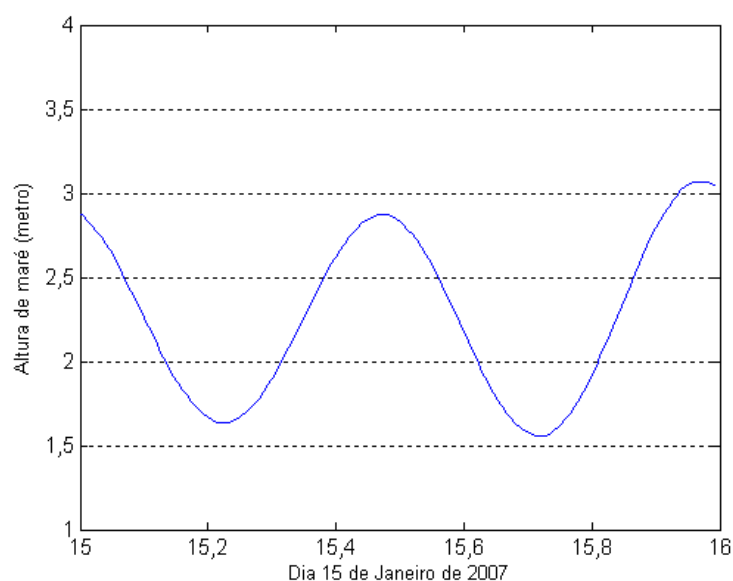


**Figura 3** – Altura e elevação de maré em relação ao respectivo plano de referência.

O marégrafo de Cascais regista as alturas de maré, que designamos por maré observada, valores necessários para o estudo da análise harmónica de maré. Em qualquer registo existem dois elementos característicos da maré: a amplitude, diferença entre as alturas da preia-mar e da baixa-mar seguinte e o período, tempo que decorre entre duas preias-mar (ou baixas-mar) consecutivas.

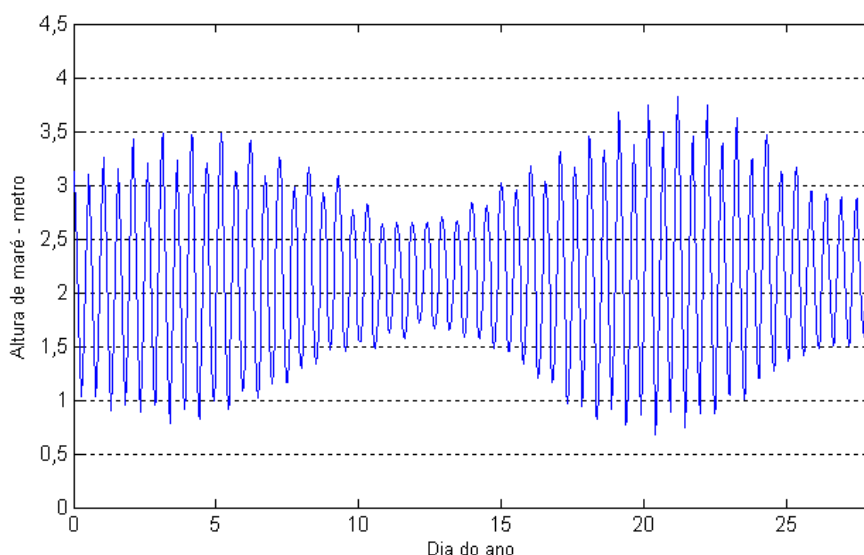
Na Figura 4 podemos observar o registo efectuado no dia 15 de Janeiro de 2007. Nesta figura identificamos os momentos das baixas-mar e das preias-mar. Neste dia, podemos verificar que a amplitude de maré foi cerca de 2,5 m. Podemos ainda observar a existência de duas baixas-mar e duas preias-mar no dia indicado. Este fenómeno verifica-se todos os dias, tal facto significa que a maré existente na zona de Cascais (e em todo o território nacional) é do tipo semi-diurna, com ligeira desigualdade de amplitude, devido à diferença entre as duas preias-

mar/baixas-mar de cada dia. O período da maré, tempo que decorre entre duas preias-mar ou duas baixas-mar consecutivas é de 12 horas e 25 minutos. Este tempo corresponde a metade do dia lunar.



**Figura 4** – Maré observada no dia 15 de Janeiro de 2007.

Se analisarmos um registo com dados de cerca de um mês (Figura 5), podemos observar variações nas preias-mar e nas baixas-mar. Verificamos que estas alterações são periódicas dentro desse mês. Quando se registam as maiores amplitudes de maré, maiores diferenças entre a preia-mar e a baixa-mar, estamos perante as marés vivas. Quando se registam as menores amplitudes de maré, menores diferenças entre a preia-mar e a baixa-mar, estamos perante as marés mortas. Nas marés mortas, as marés altas são mais baixas que a média e as marés baixas são mais altas que a média. As marés vivas e as marés mortas ocorrem duas vezes por mês e, como veremos mais adiante, estão relacionadas com as fases da Lua.



**Figura 5** – Alturas de maré registadas nos primeiros 28 dias de Janeiro de 2007.

Para modelar a onda de maré os registos de alturas de maré só por si não são suficientes. Para compreender a parte física da maré, e o seu comportamento, é necessário conhecer as Leis de Newton sobre o movimento e o princípio de conservação de massa. A primeira lei de Newton afirma que o movimento rectilíneo de um corpo que se move a velocidade constante só é alterado pela acção de uma força externa que actue sobre ele. A segunda lei de Newton diz que a aceleração e a força têm a mesma direcção e são directamente proporcionais. A gravidade é um fenómeno natural que faz com que dois corpos se atraiam com uma força proporcional às suas massas. Um ponto à superfície da Terra está sujeito à força gravítica da Terra, esta força “puxa” no sentido do centro de massa. A força gravítica da Terra aprisiona os oceanos na sua superfície, mas as forças gravitacionais da Lua e do Sol e a força centrífuga do sistema Terra – Lua – Sol actuam externamente sobre os oceanos – forças geradoras de maré. Os efeitos destas forças externas sobrepõem-se ao efeito da força de gravidade da Terra atraindo as águas oceânicas para vários pontos da superfície de forma a equilibrar o efeito das forças actuantes. Assim, no que vamos desenvolver a seguir não teremos em consideração a força gravítica da Terra.

De seguida vamos mostrar alguns factores que geram ou influenciam a onda de maré. Posteriormente iremos desenvolver uma metodologia utilizada na análise de maré, a análise harmónica. Por fim, veremos a aplicação da análise espectral na análise de maré.

### 2.2.1. Potencial de maré

Ao considerarmos o sistema Terra – Lua (ou Terra – Sol) existe uma rotação da Terra e da Lua (ou Terra e Sol) em torno do centro de massa do sistema. Os dois corpos sofrem a acção das

forças gravitacional e centrífuga. Estas forças anulam-se no centro de massa de cada corpo. Assim, à superfície da Terra estas forças têm intensidades diferentes. Enquanto a intensidade e direcção da força centrífuga é igual em qualquer ponto da Terra, o mesmo não acontece com a força gravitacional da Lua (ou Sol) que depende da distância ponto – centro de massa da Lua (Sol). Portanto, um ponto à superfície da Terra é afectado pela combinação destas forças – força de maré. A força de maré que actua num ponto à superfície da Terra é parte da força gravitacional luni-solar que actua nesse ponto. Podemos determinar a força de maré num ponto pela diferença entre a força gravitacional que actua no ponto e a força gravitacional que actua nesse ponto se este estivesse no centro de massa da Terra.

A força de maré é o gradiente do potencial de maré no ponto considerado. Assim, para determinar o potencial de maré num ponto temos de determinar o potencial gravitacional nesse ponto e o potencial gravitacional nesse ponto se este estivesse no centro de massa da Terra. O potencial gravitacional é o trabalho realizado para afastar uma partícula para uma distância infinita da Terra. Vamos determinar o potencial de maré num ponto à superfície da Terra considerando primeiro a Lua como corpo perturbador e, posteriormente, o Sol.

Consideremos um ponto A, à superfície da Terra, de massa unitária e ângulo geocêntrico zenital  $\varphi$  (Figura 6). Pela segunda Lei de Newton, o módulo da força gravitacional provocada pela Lua em A é dado por

$$f_A = \nabla V_A = G \cdot \frac{m_L}{d_{AL}^2} \quad (13)$$

onde G é a constante de gravitação universal,  $m_L$  é a massa da Lua e  $d_{AL}$  é a distância entre o ponto A e o centro de massa da Lua.

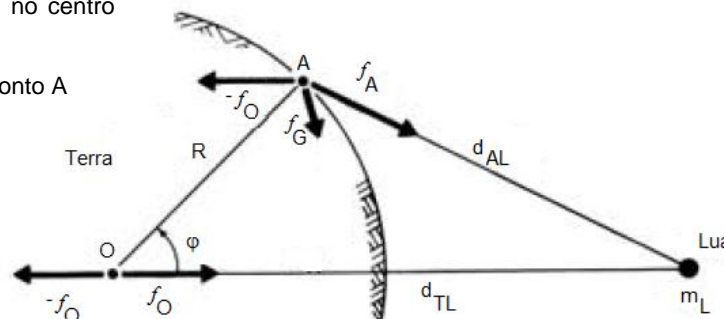
Assim, o potencial gravitacional da Lua no ponto A é dado pela expressão

$$V_A = -G \frac{m_L}{d_{AL}} \quad (14)$$

$f_O$  = força gravitacional no centro de massa da Terra (O)

$f_G$  = força de maré no ponto A

R = raio da Terra



**Figura 6** – Localização do ponto A na superfície da Terra (adaptado de Torge, 2001).

Pela análise do triângulo [OAL] (Figura 6) e usando a lei dos co-senos temos que

$$d_{AL}^2 = d_{TL}^2 + R^2 - 2 \cdot d_{TL} \cdot R \cdot \cos \varphi \quad (15)$$



Logo,

$$\frac{1}{d_{AL}} = \frac{1}{d_{TL}} \left( 1 + \frac{R^2}{d_{TL}^2} - 2 \cdot \frac{R}{d_{TL}} \cdot \cos \varphi \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (16)$$

Substituindo (16) na equação (14) obtemos

$$V_A = -\frac{G \cdot m_L}{d_{TL}} \left( 1 + \frac{R^2}{d_{TL}^2} - 2 \cdot \frac{R}{d_{TL}} \cdot \cos \varphi \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (17)$$

A potência que se encontra no segundo membro da equação (17) pode ser expandida utilizando os polinômios de Legendre em  $\cos \varphi$  obtendo

$$V_A = -\frac{G \cdot m_L}{d_{TL}} \left( 1 + \frac{R}{d_{TL}} \cdot P_1(\cos \varphi) + \frac{R^2}{d_{TL}^2} \cdot P_2(\cos \varphi) + \frac{R^3}{d_{TL}^3} \cdot P_3(\cos \varphi) + \dots \right) \quad (18)$$

em que os polinômios de Legendre são dados por

$$\begin{aligned} P_1(\cos \varphi) &= \cos \varphi \\ P_2(\cos \varphi) &= \frac{1}{2} (3 \cos^2 \varphi - 1) \\ P_3(\cos \varphi) &= \frac{1}{2} (5 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi) \end{aligned} \quad (19)$$

O módulo da força gravitacional da Lua no centro de massa da Terra, O, é dado por

$$f_O = G \cdot \frac{m_L}{d_{TL}^2} \quad (20)$$

onde  $d_{TL}$  é a distância entre os centros de massa da Terra e da Lua.

Portanto, o potencial gravitacional da Lua no centro de massa da terra é dado pela expressão

$$V_O = -G \frac{m_L}{d_{TL}} \quad (21)$$

Assim, o potencial gravitacional no ponto A, tendo este transladado para o centro de massa da Terra é dado por

$$V_{O,A} = V_O + \delta V_O \quad (22)$$

onde  $\delta V_O$  se deve à translação do ponto A para o centro de massa da Terra.

$$\delta V_O = -G \frac{m_L}{d_{TL}^2} R \cdot \cos \varphi \quad (23)$$

Substituindo em (22) as condições (21) e (23), temos que

$$V_{O,A} = -G \frac{m_L}{d_{TL}} - G \frac{m_L}{d_{TL}^2} R \cdot \cos \varphi \quad (24)$$

Assim, o potencial de maré gerado pela Lua no ponto A é dado por

$$L_A = V_A - V_{O,A} = -G \frac{m_L}{d_{TL}} \left( \frac{R^2}{d_{TL}^2} \cdot P_2(\cos \varphi) + \frac{R^3}{d_{TL}^3} \cdot P_3(\cos \varphi) + \dots \right) \quad (25)$$

Segundo Torge (2001) o primeiro termo contribui com 98% da força total e, uma vez que neste caso  $\frac{R}{d_{TL}} \approx \frac{1}{60}$ , os termos seguintes podem ser desprezados.

Da mesma forma determinamos o potencial de maré gerado pelo Sol no ponto A

$$S_A = -G \frac{m_S}{d_{TS}^3} \left( \frac{R^2}{d_{TS}^2} \cdot P_2(\cos \varphi_S) + \frac{R^3}{d_{TS}^3} \cdot P_3(\cos \varphi_S) + \dots \right) \quad (26)$$

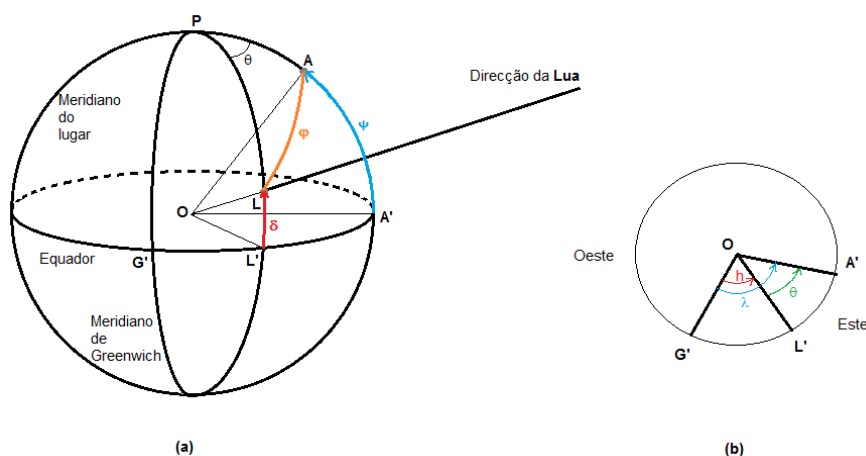
Tal como no potencial criado pela Lua podemos desprezar todos os termos a partir do segundo uma vez que  $\frac{R}{d_{TS}} \approx \frac{1}{23600}$ .

Assim, o potencial de maré no ponto A, desprezando o efeito dos outros corpos, é dado por

$$\Omega_A = L_A + S_A \quad (27)$$

Não é útil para estudar as variações temporais no potencial de maré, usar o ângulo geocêntrico zenital,  $\varphi$ . O referencial utilizado para determinar o potencial de maré no ponto A é um referencial horizontal com origem no centro de massa da Terra, cujo plano horizontal está definido pelo plano da órbita da Lua. Para podermos relacionar o potencial de maré com o tempo solar temos de efectuar uma mudança de sistema de coordenadas. Assim, vamos mudar para um sistema de referência equatorial com origem no centro de massa da Terra, em que Oz tem a direcção do eixo de rotação da Terra, Oxy contém o plano do equador, onde Ox tem a direcção da origem das longitudes, meridiano de Greenwich e Oy tem direcção de modo a formar um sistema directo. No que vamos desenvolver a seguir vamos considerar apenas o potencial criado pela Lua uma vez que é o que tem maior expressão, dado que a Lua se encontra mais próxima da Terra que o Sol e que tal consideração simplifica os cálculos.

Neste novo sistema, as coordenadas de A são a latitude e longitude geocêntricas ( $\lambda, \psi$ ) e as coordenadas da Lua são o ângulo horário e a declinação ( $h, \delta$ ). Tanto a longitude geocêntrica de A como o ângulo horário da Lua são positivos para Este do meridiano de Greenwich (Figura 7). No triângulo esférico [PAL], podemos verificar que  $\angle LPA = \theta = \lambda - h$ .



**Figura 7** – a) Representação do sistema equatorial e b) projecção no plano do Equador.

Usando a trigonometria esférica temos que

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= \cos(90 - \delta) \cdot \cos(90 - \psi) + \sin(90 - \delta) \cdot \sin(90 - \psi) \cdot \cos \theta \\ \Leftrightarrow \cos \varphi &= \sin \delta \cdot \sin \psi + \cos \delta \cdot \cos \psi \cdot \cos \theta\end{aligned}\quad (28)$$

Assim, no potencial de maré em A, a mudança de variável efectua-se através dos polinómios de Legendre:

$$P_n(\cos \varphi) = P_n(\sin \delta) \cdot P_n(\sin \psi) + 2 \sum_{m=1}^n A_m \quad (29)$$

com

$$A_m = \frac{(n-m)!}{(n+m)!} (R_{nm}(\psi, \lambda) \cdot R_{nm}(\delta, h) + S_{nm}(\psi, \lambda) \cdot S_{nm}(\delta, h)) \quad (30)$$

onde as harmónicas esféricas fundamentais são dadas pelas condições seguintes

$$\begin{aligned}R_{nm}(\psi, \lambda) &= P_{nm}(\sin \psi) \cos(m\lambda) \\ S_{nm}(\psi, \lambda) &= P_{nm}(\sin \psi) \sin(m\lambda) \\ R_{nm}(\delta, h) &= P_{nm}(\sin \delta) \cos(mh) \\ S_{nm}(\delta, h) &= P_{nm}(\sin \delta) \sin(mh)\end{aligned}\quad (31)$$

Usamos a condição (29) para adaptar a fórmula do potencial de maré obtida em (25), no qual desprezamos os termos a partir do segundo, para

$$\begin{aligned}L_A &= -G \frac{m_L}{d_{TL}} \cdot \frac{R^2}{d_{TL}^2} \cdot (P_2(\sin \delta) \cdot P_2(\sin \psi) + 2 \sum_{m=1}^2 A_m) \\ &= -G \cdot m_L \cdot \frac{R^2}{d_{TL}^3} \left[ P_{20}(\sin \delta) \cdot P_{20}(\sin \psi) + \frac{1}{3} P_{21}(\sin \delta) \cdot P_{21}(\sin \psi) \cdot \cos \theta + \frac{1}{12} P_{22}(\sin \delta) \cdot P_{22}(\sin \psi) \cdot \cos(2\theta) \right]\end{aligned}\quad (32)$$

As expressões  $P_{2i}$  estão associadas aos polinómios de Legendre da seguinte forma

$$\begin{aligned}P_{20}(\sin \alpha) &= \frac{1}{2} (3 \sin^2 \alpha - 1) \\ P_{21}(\sin \alpha) &= 3 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \\ P_{22}(\sin \alpha) &= 3 \cos^2 \alpha\end{aligned}\quad (33)$$

Ao substituir (33) em (32) vem

$$L_A = -\frac{3}{4} G \cdot m_L \cdot \frac{R^2}{d_{TL}^3} \left[ 3 \left( \sin^2 \psi - \frac{1}{3} \right) \left( \sin^2 \delta - \frac{1}{3} \right) + \sin(2\psi) \cdot \sin(2\delta) \cdot \cos \theta + \cos^2 \psi \cdot \cos^2 \delta \cdot \cos(2\theta) \right] \quad (34)$$

Uma vez que o ângulo horário,  $h$ , está relacionado com o tempo solar médio (TU), então a fórmula (34) já nos permite relacionar o potencial de maré num ponto qualquer da Terra com o

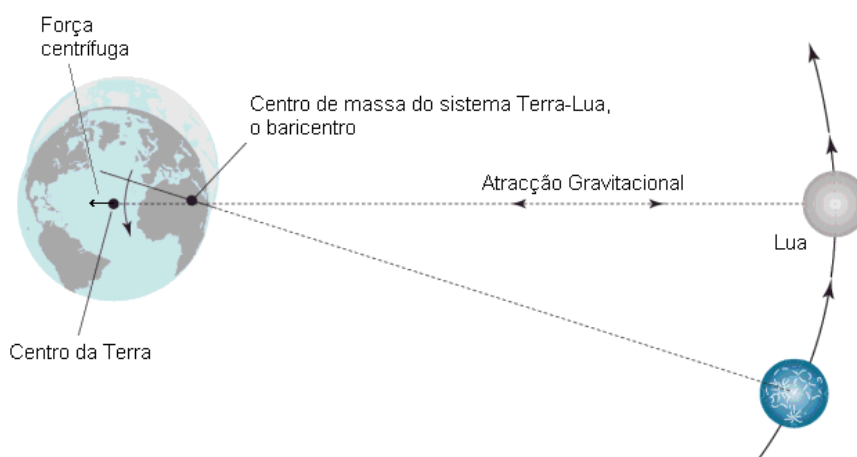
tempo solar médio, tempo utilizado ao efectuar as medições das alturas de maré. Esta relação (34) é utilizada para determinar a maré de equilíbrio de que vamos falar em seguida.

### 2.2.2. Maré de equilíbrio

A onda de maré é gerada pela força gravitacional e pela força centrífuga. As forças geradoras de maré devem-se sobretudo ao Sol e à Lua, pelo que temos duas componentes principais: solar e lunar. Segundo Davis e FitzGerald (2004), a força geradora de maré provocada pelo Sol é 46% da que é provocada pela Lua. As referidas forças formam a maré de origem astronómica que é possível determinar.

A força gravitacional é inversamente proporcional ao quadrado da distância entre os corpos (13). Significa que corpos distantes da Terra no sistema solar exercem pouca força gravitacional na sua superfície. Os corpos mais próximos da Terra são a Lua e o Sol, pelo que são estes que exercem maior força na superfície da Terra. Apesar de a massa do Sol ser maior que a da Lua, o Sol está mais afastado da Terra do que a Lua, assim, a força exercida pela Lua sobre a superfície da Terra é superior à força exercida pelo Sol.

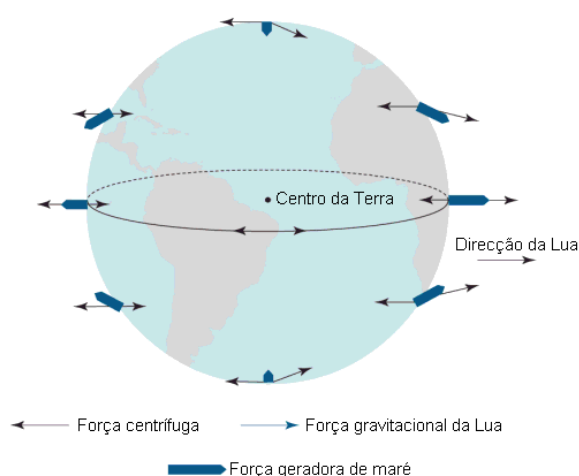
Uma vez que a Lua é o corpo que exerce maior influência na superfície da Terra, vamos considerar o sistema Terra – Lua. Tanto a Terra como a Lua rodam em torno de um ponto: o centro de massa do sistema – baricentro (Figura 8). Como a massa da Terra é superior à massa da Lua, o baricentro do sistema encontra-se a 1656 km da superfície da Terra (Davis e FitzGerald, 2004). Devido à revolução em torno do baricentro, a superfície da Terra é afectada pelo efeito da força centrífuga em relação a essa revolução (a força centrífuga gerada pela rotação da Terra em torno de si própria não contribui para gerar a maré).



**Figura 8** – Centro de massa do sistema Terra – Lua (adaptado de Davis e FitzGerald, 2004).

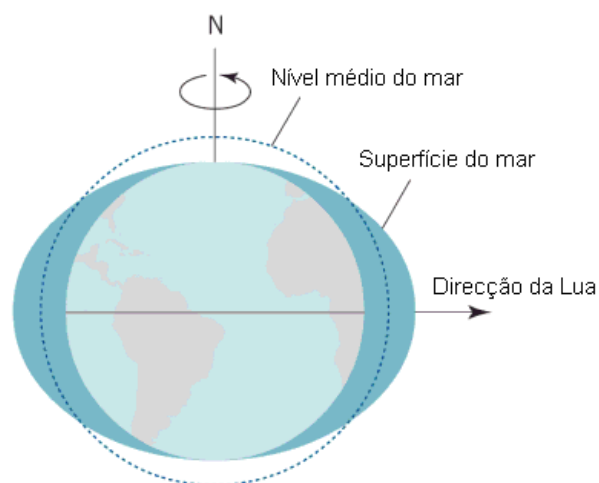
A onda de maré é gerada pelo facto de a força centrífuga e a força gravitacional serem diferentes em cada ponto da superfície da Terra. Estas forças são iguais no centro de massa de cada corpo.

Segundo a teoria da maré de equilíbrio, esta é uma maré teórica usada para estudar o comportamento da onda de maré à superfície da Terra. Para efectuar este estudo, supomos que a Terra está totalmente coberta de água com profundidade uniforme, de forma a não existir resistência no movimento da camada superficial e que a água está sempre em equilíbrio com as forças geradoras de maré. Nestas condições, a resposta da superfície da Terra a estas forças seria instantânea. A maré de equilíbrio é um modelo usado na análise de maré.



**Figura 9** – Actuação das forças gravítica e centrífuga da Lua em pontos à superfície da Terra (adaptado de Davis e FitzGerald, 2004).

Na Figura 9 podemos ver o efeito que a combinação destas forças provoca em vários pontos da superfície da Terra. Para compreender melhor como actuam estas forças, comecemos por considerar um ponto que esteja à superfície da Terra na face virada para a Lua. A força de atracção gravitacional exercida neste ponto é maior do que a força centrífuga. A força gravitacional é maior porque a distância deste ponto à Lua é menor do que a distância do centro de massa do sistema Terra – Lua à Lua. Na face oposta da Terra, a força centrífuga exercida sobre um ponto à superfície é maior do que a força de atracção gravitacional da Lua. Tal deve-se ao facto deste ponto estar mais distante da Lua do que do centro de massa do sistema. Assim, esta diferença de forças provoca um movimento da hidrosfera no sentido da Lua, na face virada para esta e, na face oposta, provoca um afastamento da Lua. Este movimento cria dois bojos na superfície oceânica da Terra, um no sentido da Lua e outro a afastar-se desta. Na zona entre os bojos há uma depressão da hidrosfera. Na Figura 10, podemos ver, de forma um pouco exagerada, os bojos criados pela acção destas forças geradoras de maré.



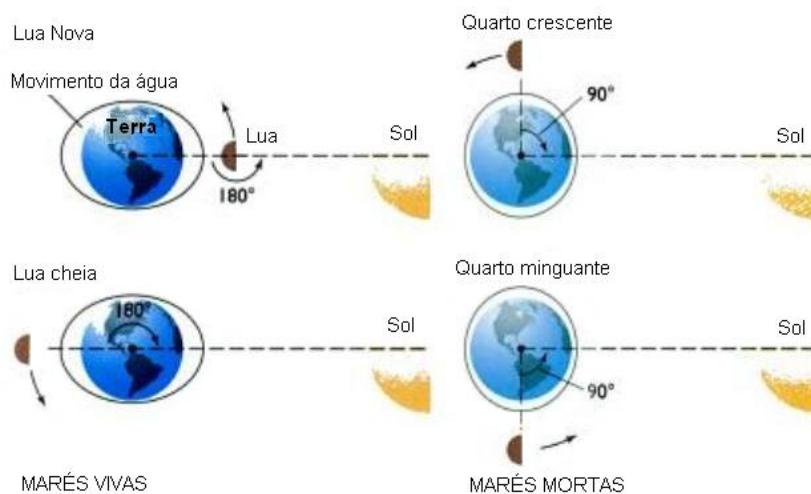
**Figura 10** – Maré gerada na superfície da Terra pelas forças gravitacional e centrífuga da Lua (adaptado de Davis e FitzGerald, 2004).

O movimento de rotação da Terra em torno do seu eixo faz com que um dado ponto da superfície “entre” e “saia” do bojo em determinados momentos criando a maré diária (Figura 4), ou seja, um movimento de maré ao longo da superfície da Terra. Quando o ponto “entra” no bojo, a maré sobe e quando “sai” do bojo a maré desce. Como o plano da órbita da Lua não é perpendicular ao eixo da Terra, diferentes pontos da superfície da Terra passam por diferentes pontos dos bojos. A localização de cada ponto à superfície da Terra vai permitir determinar o período da maré. A latitude dos pontos define os vários tipos de maré: marés diurnas, nas altas latitudes; marés semi-diurnas, nas baixas latitudes; ou marés mistas, nas latitudes médias. As marés diurnas são caracterizadas por conterem apenas um ciclo de preia-mar e baixa-mar num dia lunar (24 horas e 50 minutos). As marés mistas têm características dos dois tipos de marés. Tanto nas marés semi-diurnas como nas marés mistas verificamos duas preias-mar e duas baixas-mar por dia lunar. O que distingue estes dois tipos de maré são as diferenças de amplitudes das duas preias-mar/baixas-mar do dia (OHI, 2005).

No movimento de translação da Lua em torno da Terra, a Lua descreve uma trajectória elíptica. Portanto, a distância entre estes corpos varia ao longo do mês. Como a força gravitacional da Lua que actua sobre a superfície da Terra depende da distância, significa que ao longo do mês esta força também varia de intensidade. Assim, quando a Lua se encontra mais perto da Terra (perigeu), as forças geradoras de maré são superiores à média e geram uma maré de maior amplitude. Esta proximidade acontece uma vez por mês. Passadas cerca de duas semanas, a Lua encontra-se no seu ponto mais afastado da Terra (apogeu). Nesta altura, a força geradora será menor pelo que gera uma maré de amplitude inferior à média. Portanto, esta proximidade ou afastamento da Lua em relação à Terra vai reforçar ou reduzir a amplitude de maré.

O efeito provocado pelo Sol é semelhante ao da Lua mas de menor amplitude, pois está mais distante da Terra. Assim, as duas figuras anteriores são representativas do efeito provocado pelo Sol, basta trocar “Lua” para “Sol”. No caso do movimento de translação referido anteriormente, no sistema Terra – Sol, a Terra é que se movimenta em torno do Sol, mas o efeito é semelhante.

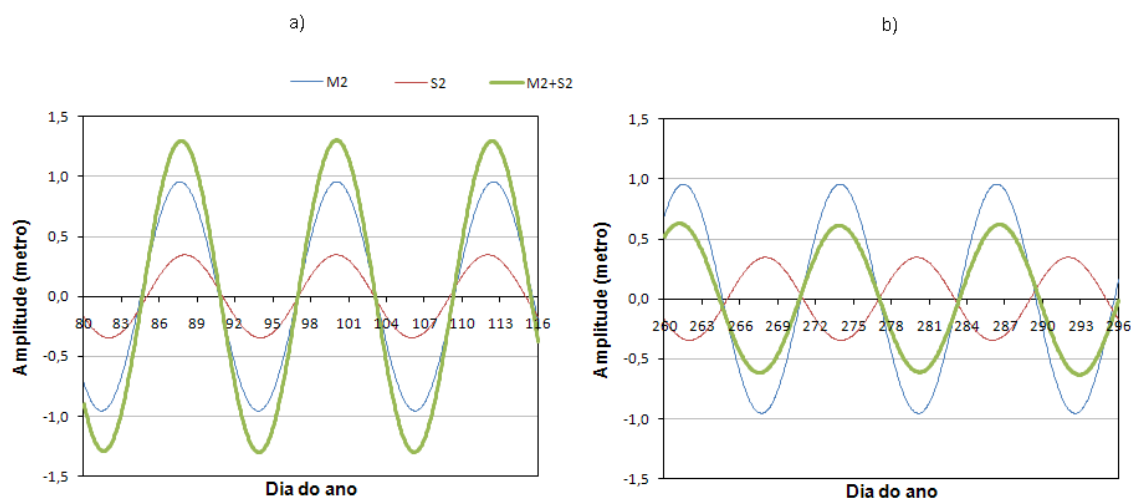
Quando combinamos os efeitos da Lua e do Sol, estes corpos geram quatro bojos na superfície da Terra. Uma vez que a Lua está mais próxima da Terra, os bojos gerados são maiores e vão ser amplificados ou reduzidos de acordo com a posição da Lua e do Sol relativamente à Terra. Este efeito conjunto provoca as chamadas marés vivas e as marés mortas consoante o sistema Terra – Lua – Sol esteja alinhado ou não. As marés vivas ocorrem quando a Lua e o Sol estão na mesma direcção, provocando dois bojos nessa direcção, o que origina marés de maior amplitude. No caso em que as direcções Terra – Sol e Terra – Lua sejam perpendiculares, os bojos gerados pela Lua vão ser reduzidos por causa do efeito contrário do Sol. Nesta situação, observam-se marés de amplitude reduzida – marés mortas. As marés mortas ocorrem quando a Lua está no quarto-crescente ou quarto-minguante, enquanto as marés vivas ocorrem nas fases de Lua cheia e Lua nova (Figura 11).



**Figura 11** – Origem das marés vivas e marés mortas (adaptado de Pinet, 2000).

Quando estamos a modelar a onda de maré, as posições dos corpos no sistema Terra – Lua – Sol, provocam um aumento ou redução da amplitude desta onda, consoante tenhamos marés vivas ou marés mortas. Os efeitos na amplitude de maré usando as constituintes de maior amplitude, uma referente ao efeito da Lua ( $M_2$ ) e outra ao efeito do Sol ( $S_2$ ) podem observar-se na Figura 12. Nesta figura, a linha verde representa o efeito conjunto das duas constituintes. Na Figura 12-a, verificamos um aumento de amplitude uma vez que as duas ondas estão em fase, nesta altura ocorrem as marés vivas. Na Figura 12-b, as duas ondas estão em quadratura

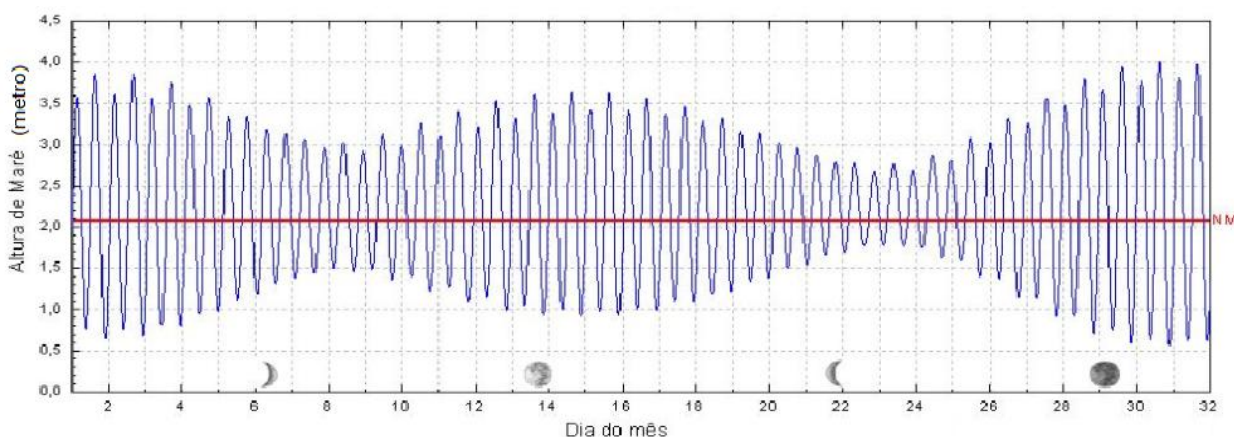
pelo que há uma redução na amplitude que representa o efeito conjunto, altura em que ocorrem as marés mortas.



**Figura 12** – Combinação das constituintes  $M_2$  e  $S_2$  nos períodos de a) marés vivas e b) marés mortas

A amplitude da maré gerada é afectada por todos os efeitos atrás referidos. Estes efeitos são modelados matematicamente através das constituintes harmónicas. Estas alteram a maré de equilíbrio. A maré de equilíbrio é uma boa forma de compreender o comportamento da superfície da Terra quando esta é sujeita às várias forças mas, os vários pressupostos da teoria da maré de equilíbrio não se verificam. A água é um fluido viscoso o que significa que a resposta às forças geradoras de maré não é instantânea, existe um desfasamento. A maré de maior amplitude num dado local não ocorre no instante em que a Lua cheia/nova passa pelo meridiano de lugar, mas sim algum tempo depois, como se pode verificar na Figura 13. A este intervalo de tempo entre os dois acontecimentos designamos por idade da maré. A superfície da Terra não está totalmente coberta de água, existem continentes e ilhas e a profundidade dos oceanos não é uniforme. A profundidade dos oceanos e o contorno dos continentes são factores que vão contribuir para alterar a progressão da onda da maré de equilíbrio, modificando a amplitude e fase desta. Por exemplo, em águas pouco profundas a onda tem menor fase e maior amplitude; em águas muito profundas, devido ao pouco atrito que sofre a onda, a velocidade é maior. Portanto, estes parâmetros (amplitude e fase) são característicos de cada local e são estes que nos vão ajudar a modelar a maré local.





**Figura 13** – Altura de maré e fases da Lua em Agosto de 2011 (adaptado de <http://wepages.fc.ul.pt/~cmantunes/hidrografia/hidro-mares.html>, 2011).

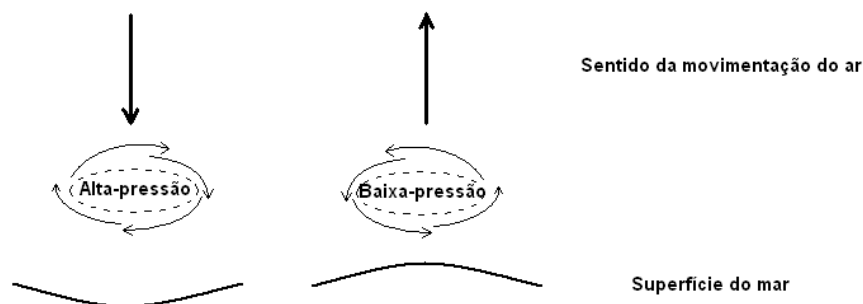
### 2.2.3. Forçamento atmosférico

O padrão regular da onda de maré de origem astronómica é alterado devido a efeitos irregulares. Os principais factores são a variação de pressão atmosférica e o efeito do vento, designando o efeito conjunto por forçamento atmosférico. Quando efectuamos a diferença entre a maré observada e a maré prevista obtemos a componente não harmónica da maré onde se inclui o forçamento atmosférico. A atmosfera actua na onda de maré de duas maneiras distintas: verticalmente, através da variação de pressão atmosférica e horizontalmente, pela acção do vento. A variação de pressão atmosférica faz-se sentir nas várias camadas de água enquanto o vento só actua nas camadas superiores da água, embora este efeito dependa do tempo durante o qual actua e da densidade das várias camadas.

Antes de falarmos dos efeitos que o vento e a variação de pressão têm na onda de maré vamos compreender a sua relação. A pressão do ar depende da sua densidade. Quando a densidade do ar está abaixo do normal, devido ao aumento de vapor de água ou por estar mais quente, a pressão atmosférica baixa, criando uma zona de baixa-pressão. Pelo contrário, quando a densidade do ar aumenta, por diminuir o vapor de água ou a temperatura, a pressão atmosférica aumenta e cria uma zona de alta-pressão. Estas variações de pressão atmosférica devem-se à distribuição desigual da radiação solar na superfície da Terra. Por exemplo, o equador é uma zona que recebe muita radiação solar e, como tal, há um aumento de temperatura que provoca uma diminuição da densidade do ar e, por conseguinte, cria uma zona de baixa-pressão. Nos pólos as temperaturas são baixas, pelo que nestes locais temos zonas de alta-pressão. O ar responde a esta variação de pressão movimentando-se das zonas de alta-pressão para as de baixa-pressão. Esta circulação do ar, provocada pelo gradiente de pressão atmosférica na Terra, é o vento.

Se não tivéssemos em consideração o efeito da rotação da Terra, encontrávamos no equador zonas de baixa-pressão e, nos pólos, zonas de alta-pressão. Assim, no equador, o ar quente subia e divergia em direcção aos pólos. Nos pólos onde o ar já se encontrava mais frio, descia. Já perto do solo, o ar frio seguia em direcção ao equador. O efeito de rotação da Terra vai influenciar este movimento do ar, e também da hidrosfera, alterando, aparentemente, a sua trajectória. O efeito que a rotação da Terra provoca na movimentação do ar ou da água tem o nome de efeito de Coriolis. Este efeito é aparente pois verifica-se apenas quando usamos um referencial rotacional, num referencial inercial tal movimento não existe. No hemisfério norte, a trajectória de um fluído sofre um desvio aparente para a direita do sentido do movimento. Esse desvio produzido pelo efeito de Coriolis depende da latitude em que estamos e da velocidade do movimento. Assim, não existem apenas uma zona de baixa-pressão e duas de alta-pressão. Existem, em latitudes intermédias, centros de alta-pressão, nas latitudes dos trópicos de Câncer e de Capricórnio ( $\pm 30^\circ$ ) e de baixa-pressão, nas latitudes dos círculos polar ártico e antártico ( $\pm 60^\circ$ ).

Um centro de alta-pressão atmosférica é caracterizado por uma rotação do ar no sentido horário, no hemisfério norte. Numa zona de alta-pressão a massa de ar é descendente. O efeito de Coriolis desvia a trajectória do movimento do ar criando a rotação do mesmo. Nas zonas de baixa-pressão a massa de ar tem uma movimentação ascendente, que o efeito de Coriolis altera gerando uma rotação do ar no sentido anti-horário, no hemisfério norte (Figura 14).

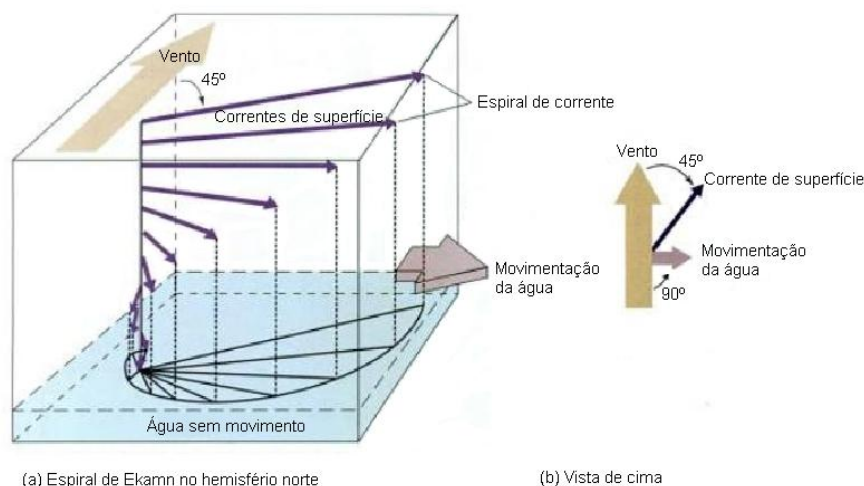


**Figura 14** – Relação do efeito do vento com a variação de pressão e o efeito na superfície do mar.

A superfície da água responde à variação de pressão ajustando a sua superfície para que, em profundidade, a pressão seja uniforme. O aumento de um milibar na pressão atmosférica provoca a diminuição de um centímetro na onda de maré. Esta resposta da massa de água é designada por EBI (Efeito Barométrico Inverso). A movimentação da água faz-se das zonas de baixa-pressão, onde podemos dizer que houve um empilhamento de água, para as zonas de alta-pressão, onde existe uma depressão da superfície (Figura 14). Esta movimentação da água é desviada para a direita, no hemisfério norte, devido ao efeito de Coriolis. As correntes

geostróficas resultam de um equilíbrio entre a variação de pressão e o efeito de Coriolis. A variação de pressão leva a uma movimentação de água de uma zona de baixa-pressão atmosférica para a de alta-pressão, mas o efeito de Coriolis vai desviar o sentido do movimento até encontrar equilíbrio. Nessa altura, forma-se uma circulação de água ao longo de zonas com a mesma pressão – correntes oceânicas.

Quando o vento cria forças de atrito na superfície do mar, este gera movimentação na água. Apenas uma fracção da sua velocidade resulta na criação de corrente no mar, dado que o processo de transferência de energia do ar para a água é um processo ineficiente. Segundo Davis e FitzGerald (2004), apenas 3 a 4% da velocidade do ar é transferida para a velocidade da corrente. Se considerarmos um vento persistente durante um longo período de tempo, este vai afectar cada vez mais camadas de água, com menos intensidade à medida que se afasta da superfície. Devido ao efeito de Coriolis, a direcção das correntes vai ser desviada com a profundidade, sendo a camada mais superficial desviada em  $45^\circ$ . Uma vez que estamos no hemisfério norte, este desvio é para a direita do sentido do vento. A acção do vento cria uma espiral de corrente designada por espiral de Ekman que está representada na Figura 15. Segundo Pinet (2000), esta espiral pode ir até 200 metros de profundidade, dependendo da força e persistência do vento. A movimentação de água gerada pelo vento tem direcção perpendicular para a direita da trajectória deste e corresponde à direcção e velocidade médias das correntes da espiral de Ekman (Figura 15). Esta movimentação de água gerada tem o nome de transporte de Ekman.

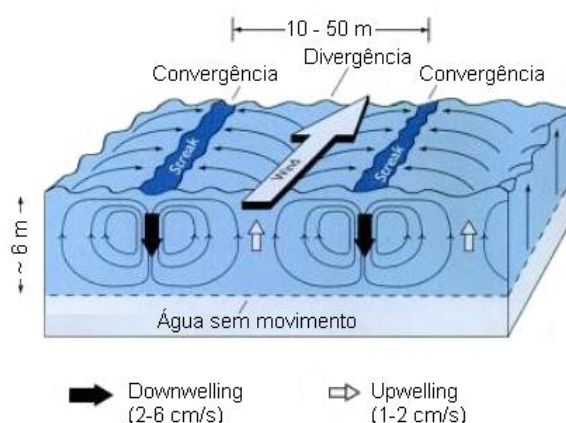


**Figura 15** – a) Correntes provocadas por um vento persistente; b) Transporte de Ekman (adaptado de Pinet, 2000).

Na nossa costa, na Primavera, registam-se alturas de maré mais baixas e no Outono mais altas (Figura 17). Tal facto deve-se ao regime de ventos que usualmente se verifica nessas alturas do ano. Normalmente, na Primavera e no Verão o vento sopra de NW. Devido ao efeito de

Coriolis, este vento origina um transporte de Ekman, perpendicular à linha de costa, com fluxo *offshore*. Tal movimentação provoca um afloramento costeiro (*upwelling*), em que as camadas mais fundas vêm à superfície, dado que as águas superficiais são afastadas da costa, e a altura de maré desce. Pelo contrário, no Outono, o vento vem de SW, o que gera um transporte de Ekman com fluxo *onshore*. Esta movimentação provoca um afundamento (*downwelling*) e as camadas superficiais são empurradas para a costa, pelo que a altura da maré sobe (Antunes e Godinho, 2011). O transporte de Ekman é a resposta do mar à acção do vento que pode durar até alguns dias.

O vento persistente a soprar à superfície do mar pode gerar uma movimentação vertical da água (Pinet, 2000). Se a velocidade do vento for superior a 3,5 m/s, o movimento da água é paralelo à direcção do vento e tem uma movimentação em espiral. Este movimento é designado por circulação de Langmuir. Esta movimentação cria células, na vertical, com aproximadamente 6 m de profundidade. As células adjacentes têm uma circulação em sentidos contrários que formam zonas de convergência e de divergência de correntes (Figura 16). A circulação de Langmuir é uma resposta de curto período do mar à acção do vento, desde alguns minutos até algumas horas.



**Figura 16** – Circulação de Langmuir (adaptado de Pinet, 2000).

A circulação de água no oceano deve-se não ao efeito do vento mas sim às correntes geostróficas. Quando estas correntes estão associadas a ventos muito fortes podem ter consequências catastróficas, causando uma subida ou descida acentuada do nível do mar. Este efeito chama-se sobre-elevação meteorológica (*storm surge*) que pode ser positiva, na subida do nível do mar, ou negativa, caso contrário. Quando esta sobre-elevação ocorre na preia-mar em altura de marés vivas pode causar inundações, causando muitos prejuízos, e na baixa-mar pode constituir uma ameaça para a navegação. Estes efeitos são de natureza não periódica no sentido harmónico, mas de curto período. Como vimos atrás, o regime de ventos que circula na costa ocidental é conhecido pelo que influencia de forma sazonal o nível do mar

nas zonas costeiras. Esta influência de longo período altera as alturas de maré observadas entre os 4 e os 10 cm (Antunes e Godinho, 2011).

Portanto, na modelação da onda de maré temos de considerar o forçamento atmosférico pelo que devemos modelar este efeito fora da análise harmónica. Através da análise harmónica modelamos apenas a componente periódica de origem astronómica da maré.

#### 2.2.4. Análise harmónica

A análise harmónica é um dos métodos utilizados para estimar a onda de maré. Através da análise harmónica decompomos a onda de maré nas suas componentes. Cada constituinte que compõe a onda de maré é representada matematicamente por uma sinusóide (35) que depende da amplitude,  $H_i$ , e da velocidade horária da onda,  $n_i$ .

$$H_i \cos(n_i t - g_i) \quad (35)$$

onde  $t$  é o tempo, em horas, e  $g_i$  é a fase inicial da onda. Quando  $t = 0$ ,  $g_i$  representa o desfasamento em relação à maré de equilíbrio no meridiano de Greenwich. Os movimentos da Lua e do Sol em relação à Terra vão ser representados através de constituintes harmónicas identificadas por letras seguidas, ou não, de um número, que indica o tipo de maré. As principais constituintes são designadas por  $M_2$ , constituinte semi-diurna lunar principal e  $S_2$ , constituinte semi-diurna solar principal. Para modelar a distância da Lua à Terra são usadas as constituintes  $N_2$  e  $L_2$ , esta última de menor amplitude. A constituinte  $K_2$  está relacionada com a declinação da Lua e do Sol em relação à Terra. A constituinte  $SA$ , de longo período, modela alterações não uniformes da distância e a declinação do Sol. As constituintes diurnas mais importantes são  $K_1$ , luni-solar e  $O_1$ , lunar. As constituintes lunares são afectadas por um ciclo nodal de 18,6 anos, mas apenas algumas são afectadas por um período de 8,85 anos relacionado com o perigeu da Lua. Estes efeitos são traduzidos na modelação matemática através de correcções à amplitude e fase das constituintes lunares,  $f_i$  e  $u_i$ .

De acordo com Godin (1972), referido em Foreman *et al.* (2009), o modelo matemático que nos dá a altura de maré oceânica, para um determinado local é

$$h(t) = Z_0 + \sum_{i=1}^n f_i H_i \cos(V_{0i} + n_i (t - t_0) + u_i - g_i) \quad (36)$$

com  $h(t)$  a altura horária da maré observada,  $Z_0$  o nível médio das águas do mar (harmónica de grau zero), o índice  $i$  identifica a onda/constituinte,  $f_i$  é o coeficiente de redução de amplitude,  $u_i$  é a correcção de longo período da fase da onda,  $V_{0i}$  é o argumento astronómico da onda às 0<sup>h</sup> médias de Greenwich, no dia 1 de Janeiro de cada ano e  $n$  é o número de constituintes utilizadas para modelar a maré. Dos valores referidos, com o MMQ determinamos as correcções a efectuar a  $Z_0$ ,  $H_i$  e  $g_i$  (com  $1 \leq i \leq n$ ), ou seja, temos  $2n+1$  incógnitas.

Uma das dificuldades na aplicação do MMQ ao sistema de equações (36) residia, até este trabalho, na lenta convergência da fase da onda, uma vez que esta última faz parte do argumento do co-seno. Efectuando a mudança de variável proposta por Foreman *et al.* (2009),

$$\begin{aligned} X_i &= H_i \cos g_i \\ Y_i &= H_i \sin g_i \end{aligned} \quad (37)$$

que substituímos no sistema (36), onde consideramos a correcção de longo período da fase da onda  $i$  desprezável,  $u_i = 0$ , obtemos

$$h(t) = Z_0 + \sum_{i=1}^n f_i (X_i \cos(V_{0i} + n_i t) + Y_i \sin(V_{0i} + n_i t)) \quad (38)$$

Uma vez que as variáveis  $X_i$  e  $Y_i$  não fazem parte do argumento do co-seno, a convergência para a solução será mais rápida. Através do MMQ obtemos correcções a efectuar a  $X_i$  e  $Y_i$ . Depois de obter os valores corrigidos podemos determinar  $H_i$  e  $g_i$  da seguinte forma

$$\begin{aligned} H_i &= \sqrt{X_i^2 + Y_i^2} \\ g_i &= \tan^{-1} \left( \frac{Y_i}{X_i} \right) \end{aligned} \quad (39)$$

O modelo obtido em (38), através da mudança de variável (37), é linear pelo que podemos escrever o sistema de equações linear na forma (9), com

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial Z_0} & \frac{\partial h_1}{\partial X_1} & \frac{\partial h_1}{\partial Y_1} & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial X_n} & \frac{\partial h_1}{\partial Y_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial h_m}{\partial Z_0} & \frac{\partial h_m}{\partial X_1} & \frac{\partial h_m}{\partial Y_1} & \dots & \frac{\partial h_m}{\partial X_n} & \frac{\partial h_m}{\partial Y_n} \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$\text{em que } \frac{\partial h_j}{\partial Z_0} = 1; \frac{\partial h_j}{\partial X_i} = f_i \cos(V_{0i} + n_i t) \text{ e } \frac{\partial h_j}{\partial Y_i} = f_i \sin(V_{0i} + n_i t) \quad (41)$$

$$\delta = \begin{bmatrix} dZ_0 \\ dX_1 \\ dY_1 \\ \vdots \\ dX_n \\ dY_n \end{bmatrix} \text{ e } W \text{ é o vector fecho que contém as diferenças entre os valores observados de}$$

alturas horárias de maré e os respectivos valores calculados,  $h(t_i)$ .

Para resolver o sistema (9) através do MMQ usamos como valores iniciais de  $Z_0$ ,  $H_i$  e  $g_i$ , valores obtidos num processamento anterior e obtemos  $\delta$ , vector de correcções a  $Z_0$ ,  $X_i$  e  $Y_i$  com  $1 \leq i \leq n$  (neste caso, usamos até 37 constituintes) e a respectiva matriz co-factor  $Q_{xy}$ . Apesar de existirem várias formas de determinar quais as constituintes que vão modelar a maré, como o critério de Rayleigh ou os números de Doodson, optámos por usar as constituintes que têm uma amplitude inicial superior a 0,003 m.

Consideremos a situação em que utilizamos 23 constituintes e temos um ano completo, de 365 dias, de observações horárias da altura de maré. As 23 constituintes vão introduzir  $2 \times 23 = 46$  variáveis no sistema, onde acrescentamos também  $Z_0$ . Temos, assim, 47 variáveis ( $n_0=47$ ). Um ano completo de registos dá-nos  $n = 24 \times 365 = 8760$  observações, que consideramos independentes. Como  $n > n_0$ , temos observações redundantes e, neste caso, o sistema tem  $r = 8760 - 47 = 8713$  graus de liberdade. Ora, se possuímos uma série de observações superior a 1 dia e 23 horas, neste caso, ficamos com um sistema sobredeterminado. Esta conclusão que tiramos é possível do ponto de vista matemático, pois conseguimos determinar os parâmetros. Mas uma situação em que temos poucos registos introduz grandes problemas na determinação das constituintes, como iremos verificar mais à frente.

A existência de redundância nas observações permite calcular a precisão dos valores estimados através da matriz co-factor atrás referida. Como pretendemos a precisão de  $H_i$  e  $g_i$ , temos de aplicar a Lei da Propagação das Variâncias e Co-variâncias à transformada da variável inversa (39), para obter a matriz das variâncias e co-variâncias das constituintes harmónicas locais ( $H_i, g_i$ ),

$$\Sigma_{H,g} = \sigma_0^2 J \cdot Q_{X,Y} \cdot J^T \quad (42)$$

onde  $J$  é a matriz Jacobiana de mudança de variável

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial Z_0}{\partial Z_0} & \frac{\partial Z_0}{\partial X_1} & \frac{\partial Z_0}{\partial Y_1} & \dots & \frac{\partial Z_0}{\partial Y_n} \\ \frac{\partial H_1}{\partial Z_0} & \frac{\partial H_1}{\partial X_1} & \frac{\partial H_1}{\partial Y_1} & \dots & \frac{\partial H_1}{\partial Y_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial Z_0} & \frac{\partial g_n}{\partial X_1} & \frac{\partial g_n}{\partial Y_1} & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial Y_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_1 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & M_n \end{bmatrix} \quad (43)$$

em que  $M_i$  são matrizes 2x2, definidas por

$$M_i = \begin{bmatrix} \cos g_i & \sin g_i \\ -\frac{\sin g_i}{H_i} & \frac{\cos g_i}{H_i} \end{bmatrix} \quad (44)$$

pois

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_i}{\partial X_i} &= \frac{2 X_i}{2 \sqrt{X_i^2 + Y_i^2}} = \frac{H_i \cos g_i}{H_i} = \cos g_i \\ \frac{\partial H_i}{\partial Y_i} &= \frac{2 Y_i}{2 \sqrt{X_i^2 + Y_i^2}} = \frac{H_i \sin g_i}{H_i} = \sin g_i \\ \frac{\partial g_i}{\partial X_i} &= \frac{\frac{-Y_i}{X_i^2}}{1 + \left(\frac{Y_i}{X_i}\right)^2} = \frac{-Y_i}{X_i^2 + Y_i^2} = -\frac{H_i \sin g_i}{H_i^2} = -\frac{\sin g_i}{H_i} \\ \frac{\partial g_i}{\partial Y_i} &= \frac{\frac{1}{X_i}}{1 + \left(\frac{Y_i}{X_i}\right)^2} = \frac{X_i}{X_i^2 + Y_i^2} = \frac{H_i \cos g_i}{H_i^2} = \frac{\cos g_i}{H_i} \end{aligned} \quad (45)$$

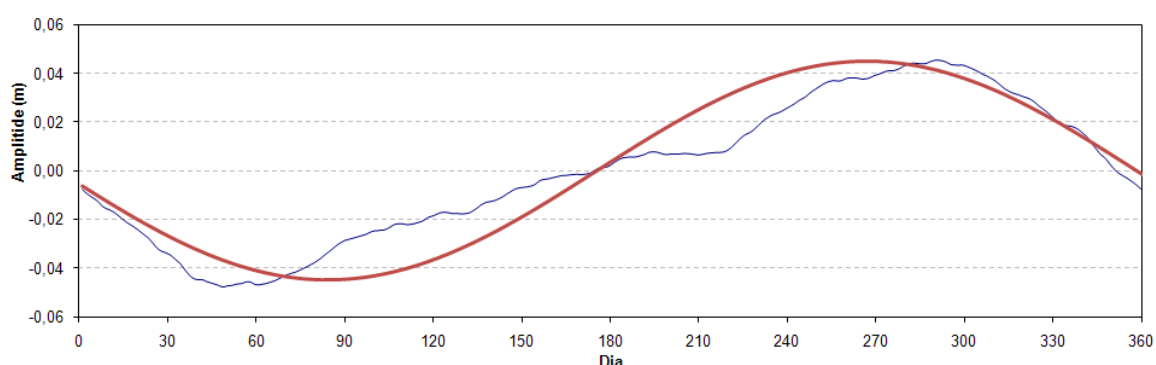
Da matriz de variâncias e co-variâncias, equação (42), obtemos as precisões dos valores estimados das constituintes harmónicas,  $Z_0$ ,  $H_i$  e  $g_i$ , para  $i=1, \dots, n$ .

Para melhorar a precisão dos parâmetros ajustados, removemos das alturas de maré observadas as componentes não harmónicas dos efeitos atmosféricos e componentes que conseguimos modelar fora do método de ajustamento dos mínimos quadrados. Assim, em (38),

$$h(t) = h_{obs}(t) - R(t) \quad (46)$$

onde  $R(t)$  representa o contributo do forçamento atmosférico, dos erros de observação e das componentes que conseguimos modelar fora da análise harmónica. Sendo assim,  $h(t)$  representa a maré de origem astronómica, isenta de quaisquer efeitos não harmónicos, a menos dos erros aleatórios das observações.

Uma vez que o efeito sazonal referido em 2.2.3. e a constituinte SA têm igual período (anual), este efeito foi modelado juntamente com a constituinte SA usando a metodologia proposta por Antunes (2010). Deste modo, em vez de determinarmos a constituinte SA juntamente com as outras constituintes, esta é modelada fora da análise harmónica. Assim, esta será tomada como correcção às alturas de maré observadas,  $R(t)$ , antes de aplicarmos o MMQ. Segundo Antunes (2010), através de seis séries anuais de registos diários determinamos a média diária da variação do nível médio do mar. A esta nova série aplicamos uma média móvel para suavizar a curva, linha azul na Figura 16. Como a modelação de uma constituinte é feita através de uma função sinusoidal (35), determinamos os parâmetros que aproximam essa sinusoidal da curva suavizada, obtendo a curva a vermelho da Figura 16. No capítulo 3, vamos verificar como esta estratégia de modelar a SA fora da análise harmónica traz uma melhoria nos resultados ao nível da exactidão do modelo harmónico de maré (Antunes, 2010).



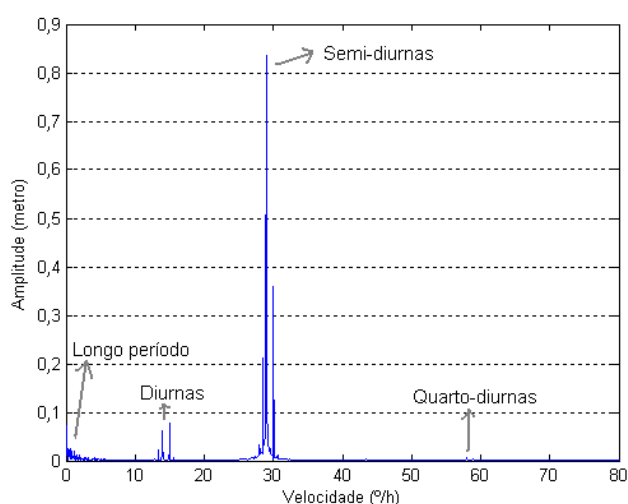
**Figura 17** – Variação sazonal média (linha azul) entre 1990 e 1995 e modelo do efeito conjunto da variação sazonal e da constituinte SA (linha vermelha).



### 2.2.5. Análise espectral aplicada a séries de alturas de maré

Na análise espectral aplicada às séries anuais de alturas de maré podemos identificar as constituintes harmónicas individualmente. Esta identificação permite escolher as constituintes que maior contributo dão na formação da onda de maré. Neste trabalho, transformámos as séries anuais de alturas de maré para o domínio de frequências com o objectivo de identificar a banda de frequências onde se encontravam as constituintes que usamos para modelar a onda de maré. Depois de identificar essa banda removemos todas as frequências que não estão dentro desta por aplicação de um filtro passa-banda (50).

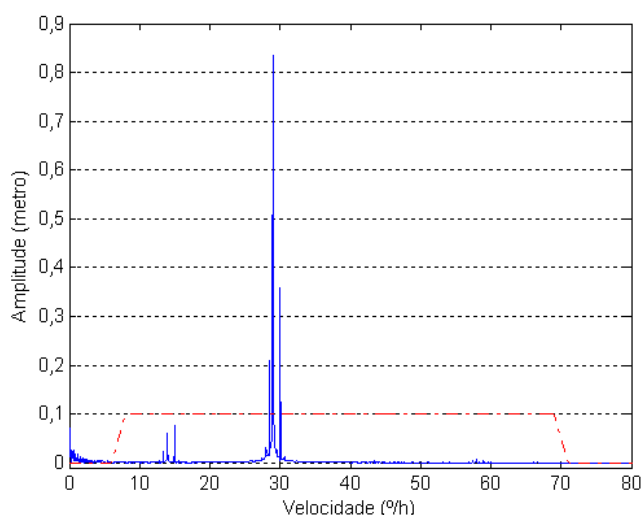
Como referido em 2.1.2., as alturas de maré têm de estar igualmente espaçadas no tempo, não podendo existir falhas e o número de dados deve ser uma potência de 2, acrescentando zeros caso não seja. Observando a representação gráfica do espectro da série de alturas de maré observada em 2007 (Figura 18) verificamos a existência de alguns grupos, que identificamos com os das constituintes de longo período, diurnas, semi-diurnas e quatro-diurnas, estas últimas sem grande amplitude. Das constituintes semi-diurnas, conseguimos identificar  $M_2$ ,  $S_2$  e  $N_2$  pois têm maior amplitude. Das constituintes diurnas, identificamos  $K_1$  e  $O_1$ . Através do espectro de uma série de alturas de maré podemos determinar, para cada constituinte, a sua frequência e amplitude.



**Figura 18** – Grupos de constituintes identificadas no espectro da série de alturas de maré de 2007.

Uma vez que pretendemos remover, através da análise espectral, os efeitos não harmónicos presentes na série anual de alturas horárias de maré, esta não foi corrigida destes efeitos antes de a transformar no domínio espectral. Depois de obter o espectro da série de dados, aplicamos o filtro passa-banda (50) que permite ficar com uma banda de frequências inalterada enquanto as restantes são eliminadas. Para suavizar o que se passa nos extremos da banda, o filtro usado não é rectangular mas sim trapezoidal, atenuando o efeito da aplicação do filtro nas

frequências que estão nos extremos da banda. Com este filtro, pretendemos que as frequências das constituintes diurnas, semi-diurnas, terço-diurnas e quarto-diurnas se mantenham inalteradas, enquanto todas as outras são eliminadas. Uma vez que estamos a trabalhar com dados obtidos no mesmo local resolvemos aplicar o mesmo filtro a todas as séries anuais. Na Figura 19 podemos observar o espectro da série de alturas de maré de 2007 e o filtro que foi aplicado (multiplicado por 0,1 para podermos ver a sua forma).



**Figura 19** – Filtro (a vermelho) aplicado ao espectro da série de alturas de maré de 2007 (a azul).

Depois de aplicar o filtro calculamos as alturas de maré para cada hora do ano associadas ao espectro filtrado usando a função inversa de (12). Supomos que estas alturas filtradas devem estar sem ruído ou com muito pouco ruído, pelo que a determinação das constantes harmónicas será mais precisa. A análise espectral deverá eliminar a ressonância pois esta tem menor frequência que as constituintes diurnas.

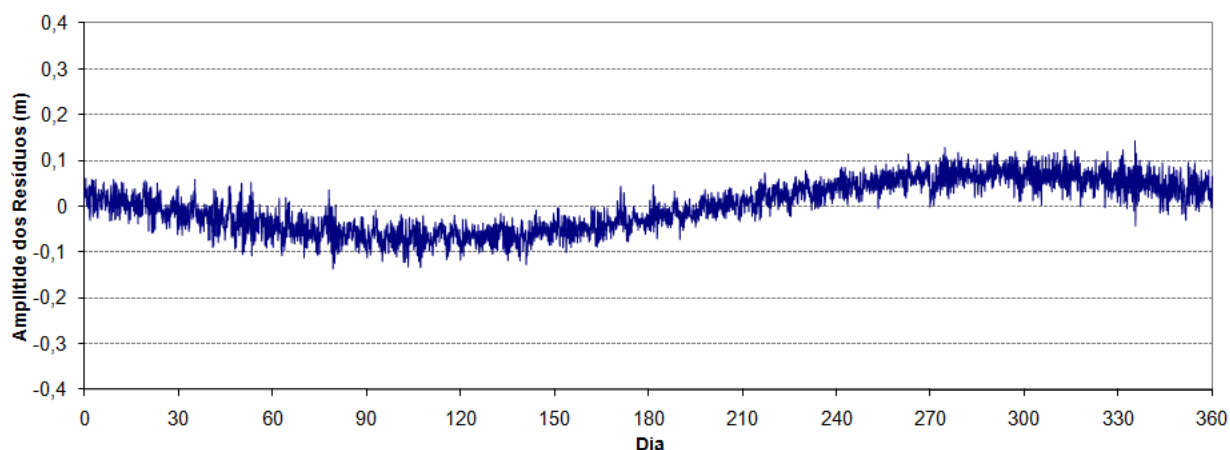
### 3. Processamento de dados

O marégrafo de Cascais é um marégrafo de poço, inicialmente com registo analógico de dados. O novo marégrafo de Cascais, com registo digital de dados, começou a funcionar em Novembro de 2003. O marégrafo antigo (que ainda funciona) regista a altura de maré a cada hora. Apesar de, com o novo marégrafo, termos mais registos por hora usámos sempre séries horárias de altura de maré. Estes registos, na forma de séries anuais entre 1970 e 2007, serviram de base para o estudo efectuado. O objectivo é determinar, para cada ano, o nível médio do mar ( $Z_0$ ) e as constantes harmónicas, amplitude e fase, das constituintes usadas na modelação da onda de maré.

Uma vez que o zero hidrográfico foi determinado em relação ao nível médio do mar de 1938, pretendemos usar a análise harmónica para determinar o nível médio do mar actual. Em 1938, o nível médio do mar em Cascais estava a 2,08 m do zero hidrográfico e este tem vindo a subir. Temos um nível médio do mar que está actualmente cerca de 15 cm acima do que foi determinado em 1938. Esta variável  $Z_0$  que vamos determinar é representada pela harmónica de grau zero.

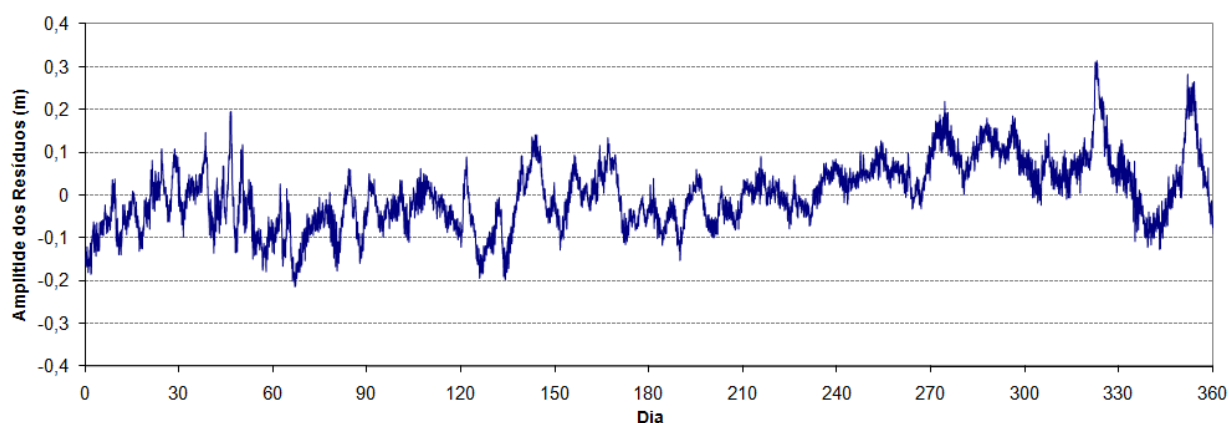
A modelação da componente astronómica da onda de maré é feita pela análise harmónica. Aplicando o MMQ, determinamos as constantes harmónicas. Neste método são necessários valores iniciais das constantes harmónicas e de  $Z_0$ . Estes valores iniciais não precisam de estar muito próximos dos valores estimados, pelo que utilizamos valores obtidos em ajustamentos anteriores. As velocidades das constituintes,  $n_i$ , e os parâmetros nodais da maré de equilíbrio,  $f_i$  e  $V_{0i}$  que constam da equação (36) são conhecidos (SHOM, 1982).

O MMQ permite obter uma boa precisão na estimativa das constantes harmónicas, desde que as alturas observadas sejam devidamente corrigidas. Assim, as alturas observadas (registadas pelo marégrafo) devem ser corrigidas dos efeitos não astronómicos como o efeito do vento e da variação de pressão atmosférica. Considerando a série de alturas de maré de 2007 e efectuando a correcção dos efeitos não astronómicos pela condição (46), antes de aplicar o MMQ, obtemos os resíduos que estão representados na Figura 20. Nesta figura podemos verificar a existência de uma componente sazonal. Como referiu Antunes (2010), melhoramos a precisão do ajustamento se modelarmos, fora da análise harmónica, a constituinte harmónica SA. Esta constituinte e a componente sazonal do nível médio do mar estão praticamente sobrepostas. Assim, a SA e a componente sazonal foram modeladas conjunta e numericamente recorrendo à média móvel dos valores médios diários da variação sazonal de 6 anos (Antunes, 2010). Na Figura 17, encontra-se a vermelho, a correcção a efectuar às alturas observadas para uma série entre 1990 e 1995. Esta correcção é parte de  $R(t)$  em (46).

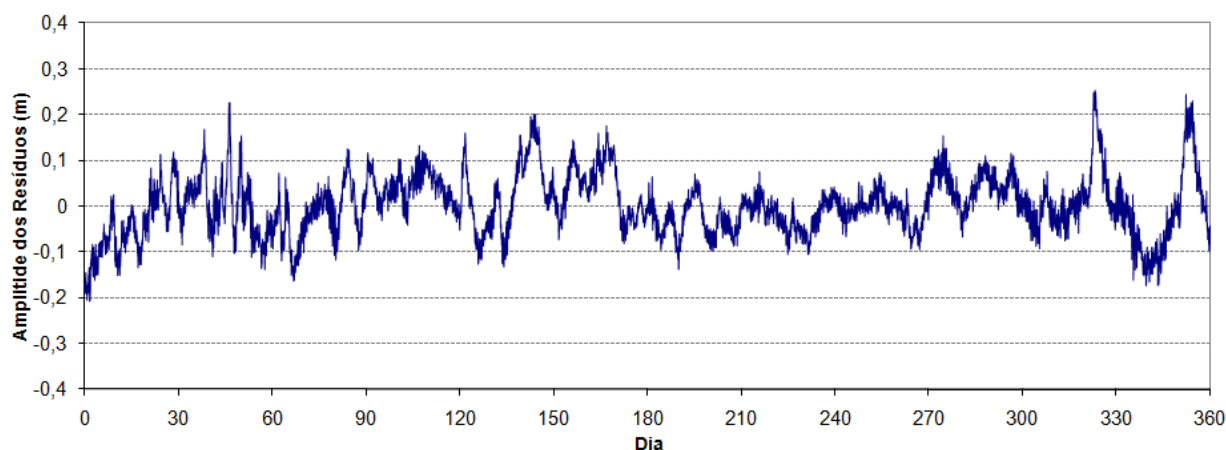


**Figura 20** – Resíduos obtidos no ajustamento da série de 2007 sem remover a SA mas corrigindo dos efeitos atmosféricos.

Nas Figuras 21 e 22, verificamos que, quando efectuamos a correcção da SA antes do ajustamento, os resíduos têm menor amplitude. Os resíduos obtidos ultrapassam os 30 cm quando não removemos a SA antes do processamento pelo MMQ, mas quando removemos a SA previamente, os resíduos não passam dos 25 cm. Portanto esta metodologia será aplicada em qualquer processamento: modelar a constituinte SA e a componente sazonal do nível médio do mar de forma independente e fora da análise harmónica usando a metodologia referida por Antunes (2010).



**Figura 21** – Resíduos obtidos no ajustamento da série de 2007 sem efectuar qualquer correcção.



**Figura 22** – Resíduos obtidos no ajustamento da série de 2007 removendo a SA antes do processamento.

Na Figura 22, podemos verificar que os resíduos, após a remoção da SA, ainda revelam a existência de efeitos que não foram removidos, os efeitos atmosféricos. Consideramos que os efeitos atmosféricos se devem à variação da pressão atmosférica e ao vento. Antes de utilizar o MMQ temos também de corrigir as alturas observadas destes efeitos. Ao analisar as várias séries anuais verificamos que apenas as mais recentes têm registos dos valores horários de pressão atmosférica mas não temos informação sobre o efeito do vento em qualquer série.

Assim, impunha-se definir uma metodologia que permitisse processar os dados das várias séries anuais de forma sistemática e com boa precisão nos resultados. De seguida, vamos mostrar como obtivemos essa metodologia que foi utilizada no processamento das todas as séries. Inicialmente foram definidos dois métodos para remover os efeitos atmosféricos e analisados os resultados de cada um. Foram refinadas estas metodologias e no final escolhemos a que nos dava melhores resultados e permitia um processamento mais rápido, recorrendo a um único programa.

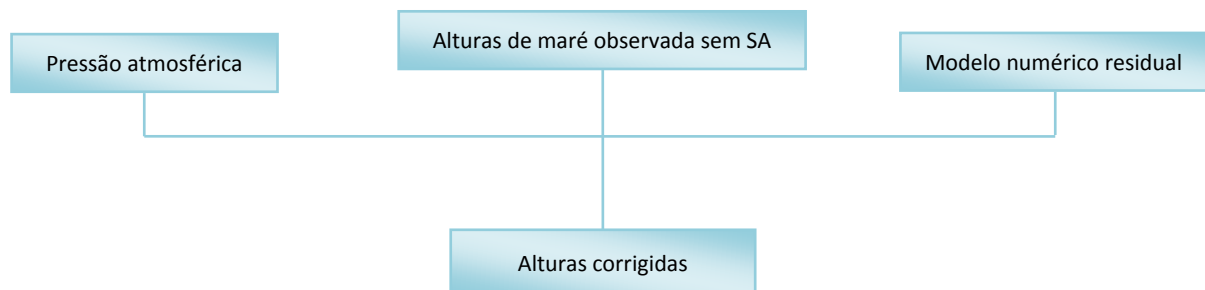
### 3.1. Metodologias para remover os efeitos atmosféricos

Para definir a metodologia que foi utilizada para remover os efeitos atmosféricos, apenas trabalhamos com a série horária de alturas de maré de 2007 que não contém falhas nas observações. Nesta série, para além das alturas de maré e do instante em que foi efectuada a medição, também são conhecidos os valores horários da pressão atmosférica. Às alturas de maré observadas removemos o efeito da SA, determinado fora da análise harmónica como referido anteriormente. Definimos dois métodos para remover os efeitos não astronómicos das alturas de maré desta série:

- Correção dos efeitos atmosféricos usando dois modelos numéricos;
- Correção conjunta dos efeitos atmosféricos por via da análise espectral.

### 3.1.1. Correção dos efeitos atmosféricos usando dois modelos numéricos

Neste método a correção dos efeitos atmosféricos é feita usando dois modelos numéricos. Um representa a variação de pressão e o outro representa os efeitos do vento. A Figura 23 apresenta um esquema de cálculo que permite obter as alturas corrigidas dos efeitos atmosféricos. Para utilizar este método, é necessário ter os valores de pressão atmosférica para podermos determinar o modelo que representa a respectiva componente do forçamento atmosférico. Na equação (46),  $R(t)$  representa o efeito conjunto da SA, que já foi removida previamente, a correção do efeito barométrico inverso e o efeito do vento.

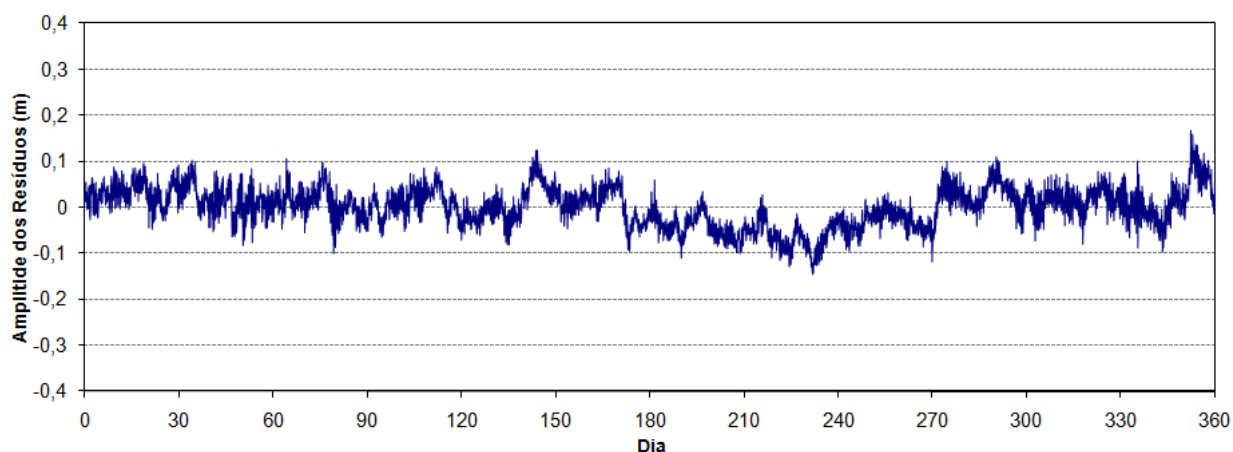


**Figura 23** – Metodologia seguida na correção das alturas de maré usando dois modelos.

O primeiro passo deste método é determinar a correção que se deve à variação de pressão atmosférica. Esta correção a efectuar às alturas observadas é a correção do EBI representada por (47).

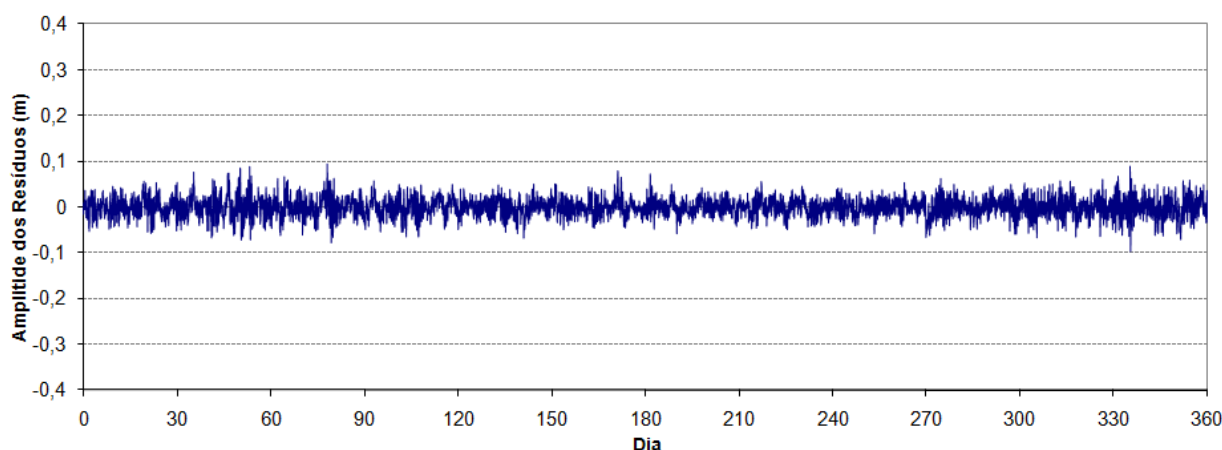
$$\Delta PA = \frac{PA - 1019}{100} \quad (47)$$

onde PA é o valor de pressão atmosférica observada em cada instante, em milibar e o valor 1019 milibar corresponde à média dos valores medidos ao nível do mar em Cascais no período compreendido entre 2004 e 2010.



**Figura 24** – Resíduos obtidos no ajustamento após a correcção do EBI.

Como se pode ver na Figura 24, a correcção do EBI diminui a amplitude dos resíduos, atingindo no máximo 18 cm. Ainda se pode verificar a existência da restante componente atmosférica – o vento. Seguindo a metodologia referida em Antunes e Godinho (2011), modelamos a influência do vento através de uma função numérica residual de tendência. Esta é calculada a partir dos resíduos obtidos num primeiro ajustamento (os que estão representados na Figura 24). A estes resíduos aplicamos uma média móvel para obter os valores horários que são as correcções às alturas observadas, já corrigidas do EBI.



**Figura 25** – Resíduos obtidos no ajustamento após as correcções.

Como se pode verificar na Figura 25, a correcção dos dois efeitos atmosféricos (vento e pressão atmosférica) traz uma melhoria significativa no ajustamento. Passamos de uma amplitude de resíduos da ordem dos 25 cm para os 10 cm. O resíduo final, depois de efectuadas estas correcções, deve ter as características de um ruído branco. O ruído branco,

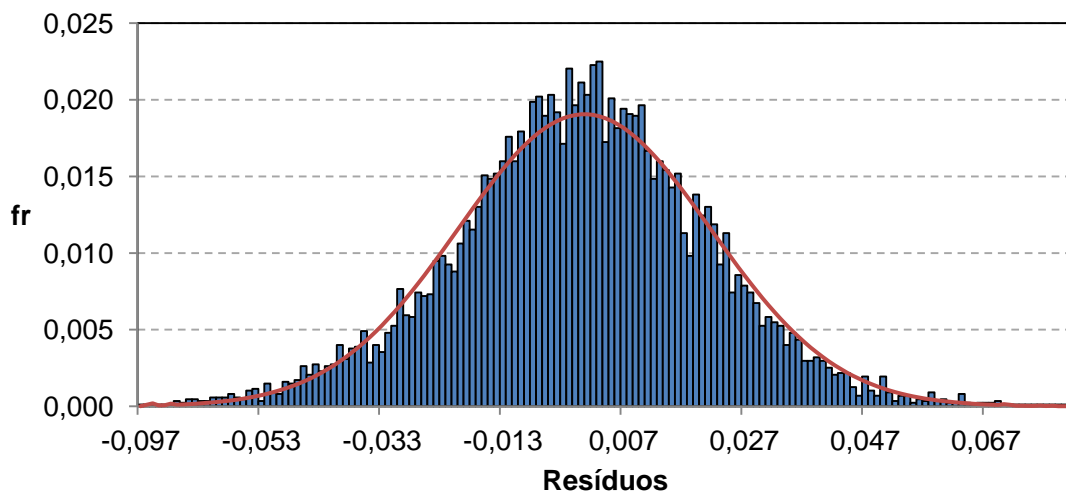
também designado por ruído Gaussiano é caracterizado por ter uma distribuição normal. Assim, temos de efectuar um teste de normalidade à distribuição dos resíduos. Existem, vários tipos de teste que podemos realizar para mostrar que a distribuição de resíduos se pode aproximar da distribuição normal como o teste de Kolmogorov-Smirnov ou o teste de Lilliefors. Dado o número elevado de dados de que dispomos vamos usar o teste de Kolmogorov-Smirnov. Neste teste comparamos, para um dado nível de significância, a máxima diferença absoluta entre a função distribuição acumulada dos  $n$  dados,  $F(x)$ , com a função distribuição acumulada empírica dos dados,  $F_n(x)$ , com um valor crítico, que está tabelado.

$$D_n = \max_x |F(x) - F_n(x)| \quad (48)$$

O valor crítico, com 5% de nível de confiança, é dado pela expressão

$$D_{0,05} = \frac{1,36}{\sqrt{n}} \quad (49)$$

A hipótese de a distribuição de resíduos obtidos no final do ajustamento ser normal é rejeitada se  $D_n > D_{0,05}$ . Ora, para os resíduos obtidos no ajustamento final,  $D_{8757} \approx 0,0204$  e  $D_{0,05} \approx 0,0145$ . Assim, concluímos que os resíduos obtidos no ajustamento não passam o teste de Kolmogorov-Smirnov com 5% de nível de confiança. Graficamente, verificamos que o histograma que representa a distribuição dos resíduos (Figura 26) parece ser simétrico em relação ao valor médio dos mesmos e acompanha a curva de Gauss.

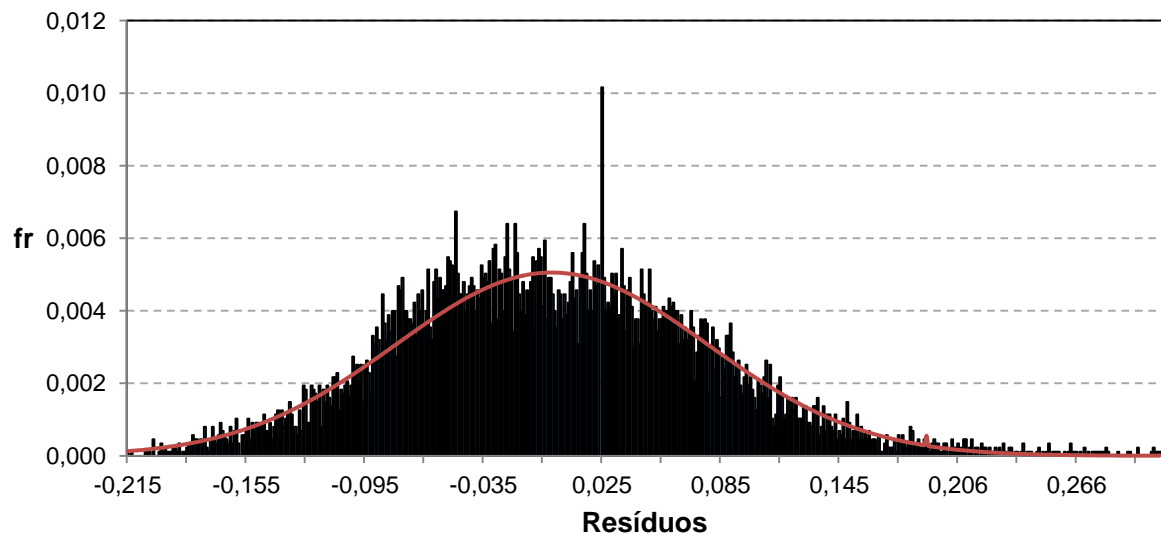


**Figura 26** – Histograma dos resíduos obtidos no ajustamento final ao qual se sobrepõe a curva de Gauss com valor médio e desvio-padrão dos resíduos (0,000007 e 0,021).

Na Figura 27 podemos comparar o histograma dos resíduos obtidos num ajustamento em que não se efectuou qualquer correcção com a curva de Gauss que lhe estaria associada. Neste

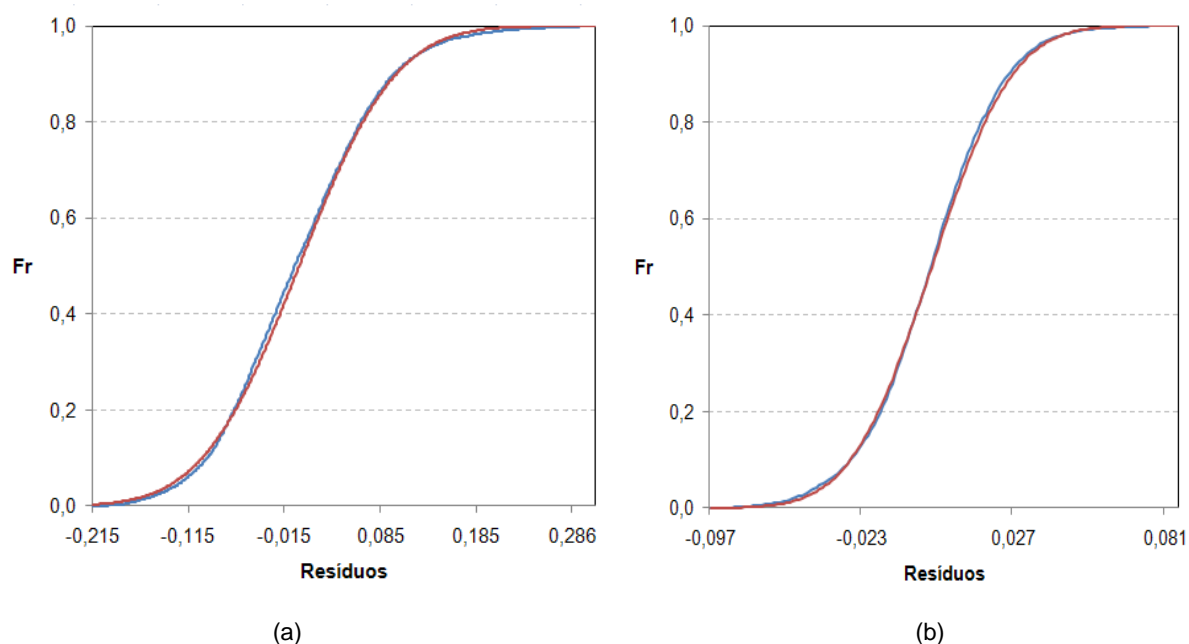


caso existe uma dispersão assimétrica dos resíduos, sendo maior para a direita do valor médio. Observando a evolução dos histogramas e respectivas curvas de Gauss, Figuras 26 e 27, verificamos que houve uma aproximação do histograma à curva de Gauss, quando se efectuaram as correcções do EBI e do modelo numérico residual. Concluimos assim, que apesar de os resíduos obtidos no ajustamento em que efectuamos as correcções do EBI e modelo numérico de tendência não passarem no teste de normalidade, houve uma aproximação da sua distribuição à Normal.



**Figura 27** – Histograma dos resíduos obtidos no ajustamento sem efectuar qualquer correcção ao qual se sobrepõe a curva de Gauss com valor médio e desvio-padrão dos resíduos (-0,000001 e 0,079).

O facto de o teste de normalidade no ajustamento em que efectuamos as duas correcções falhar indica-nos que ainda não conseguimos remover todos os erros sistemáticos. Na Figura 28 podemos comparar os polígonos de frequências acumuladas da distribuição normal (vermelho), da distribuição de resíduos sem que se efectuasse qualquer correcção (Figura 28-a) ou na distribuição de resíduos do ajustamento final (Figura 28-b). Se as distribuições de resíduos fossem normais, as curva vermelha e azul encontravam-se sobrepostas. Também verificamos que houve uma aproximação da distribuição normal nos resíduos do ajustamento final e que esta está muito próxima da normal.



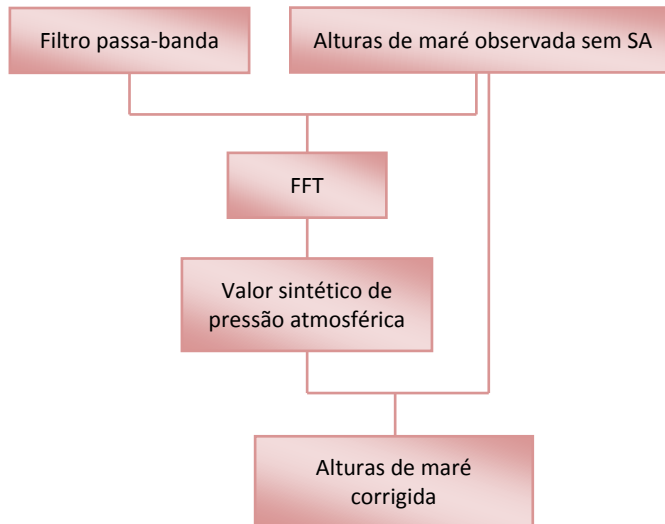
**Figura 28** – Polígono de frequências acumuladas da distribuição normal (vermelho) e a) distribuição de resíduos sem efectuar qualquer correcção; b) distribuição de resíduos no ajustamento final.

Consideramos que, apesar de falhar o teste de Kolmogorov-Smirnov, podemos aceitar os resultados pois houve uma aproximação da curva de Gauss e as precisões do ajustamento e das constantes que pretendemos estudar são aceitáveis, apresentando uma melhoria significativa. Este processo, correcção do EBI e modelo numérico residual, tem sido aplicado pelo DEGGE revelando modelar de forma adequada a onda de maré e gerar boas previsões relativamente ao que é observado.

No apêndice A podemos verificar a evolução do EMQ do ajustamento, os resíduos mínimo e máximo da série, amplitude e fase para as constituintes  $M_2$  e  $S_2$  e respectivos desvios-padrão, ao longo do processo de remoção dos efeitos modeláveis.

### 3.1.2. Correcção conjunta dos efeitos atmosféricos por via da análise espectral

Neste método os efeitos atmosféricos são modelados em conjunto. A correcção a efectuar às alturas de maré observadas é feita através de correcção do EBI, fórmula (47), uma vez que no modelo os efeitos são representados por valores sintéticos de pressão. A Figura 29 apresenta um esquema de cálculo que permite obter as alturas corrigidas dos efeitos atmosféricos. Neste método necessitamos apenas das séries horárias de alturas de maré e das frequências de corte a utilizar no filtro que aplicamos no domínio espectral. Na equação (46),  $R(t)$  representa o efeito conjunto da SA, que já foi removida previamente, e dos efeitos atmosféricos.



**Figura 29** – Metodologia seguida na correcção das alturas de maré usando um modelo.

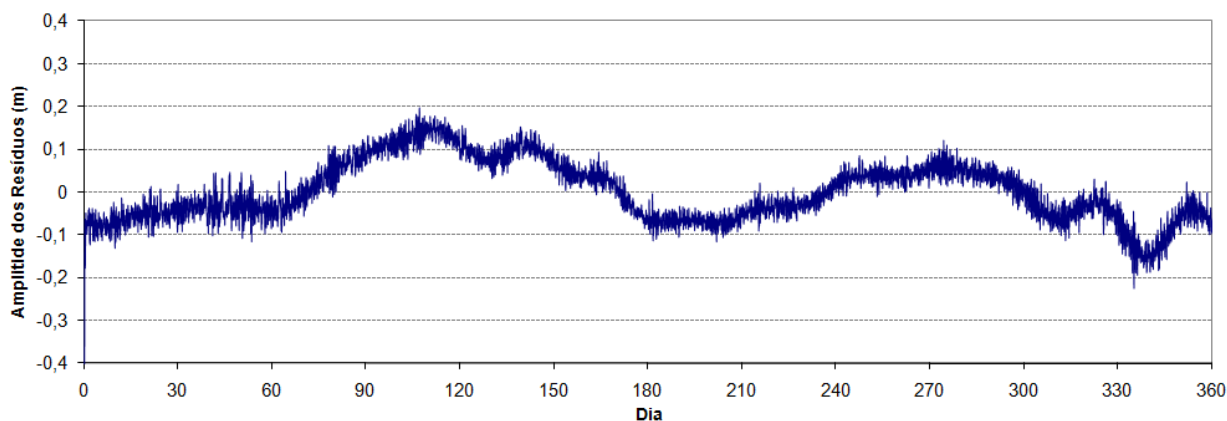
Na modelação do efeito conjunto da variação da pressão atmosférica e do vento recorreremos à análise espectral. Aplicamos a função (12) para converter a série horária de alturas de maré para o domínio espectral, onde obtemos, para cada frequência, a amplitude do espectro, como se pode ver na Figura 18. Na suposição de que, no domínio espectral, a componente atmosférica e outros erros que provocam ruído no nosso espectro têm uma frequência inferior à das constituintes diurnas e para eliminar os efeitos das altas frequências, construímos o filtro passa-banda (50) com a forma de um trapézio para diminuir os efeitos de fronteira (Antunes e Godinho, 2011). Neste filtro usamos como frequências de corte os valores 8 e 69 °/h, para definir a base menor do trapézio e 6 e 71 °/h, para a base maior. Após a aplicação do filtro obtemos o espectro filtrado da maré. Por inversão da função (12) obtemos uma série de alturas de maré filtradas que se supõem isentas dos efeitos atmosféricos e que contêm apenas as constituintes que têm frequências compreendidas entre as frequências de corte.

$$\text{filtro}(f) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq f \leq 6 \\ 0,5f + 7,5 & \text{se } 6 < f \leq 8 \\ 1 & \text{se } 8 < f \leq 69 \\ -0,5f + 69,5 & \text{se } 69 < f \leq 71 \\ 0 & \text{se } f > 71 \end{cases} \quad (50)$$

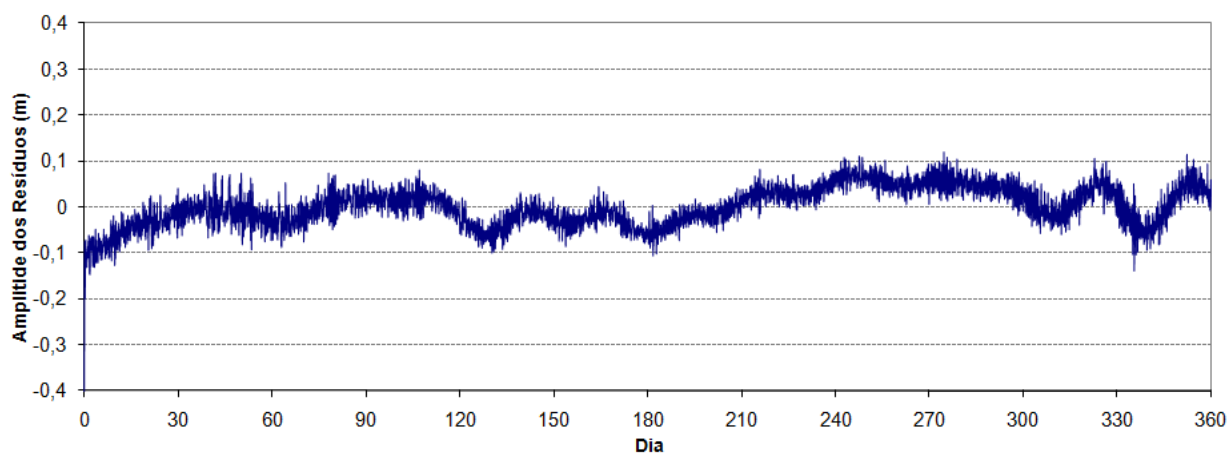
Ao efectuar a diferença entre a maré observada e a maré filtrada obtemos uma série residual, usada como modelo da componente não harmónica de origem meteorológica. Esta série residual é então convertida em série de valores sintéticos de pressão.

Tal como referimos antes, se não removermos a constituinte SA à série de alturas de maré, esta aparece também nos resíduos após o ajustamento (Figura 30). Assim, uma vez que esta constituinte já se encontra modelada, antes de converter as alturas de maré para o domínio

espectral esta constituinte é removida das alturas observadas. Sendo assim, o filtro será aplicado à maré sem esta constituinte. Esta remoção melhora a precisão do ajustamento como se pode verificar nos resíduos obtidos (Figura 31).



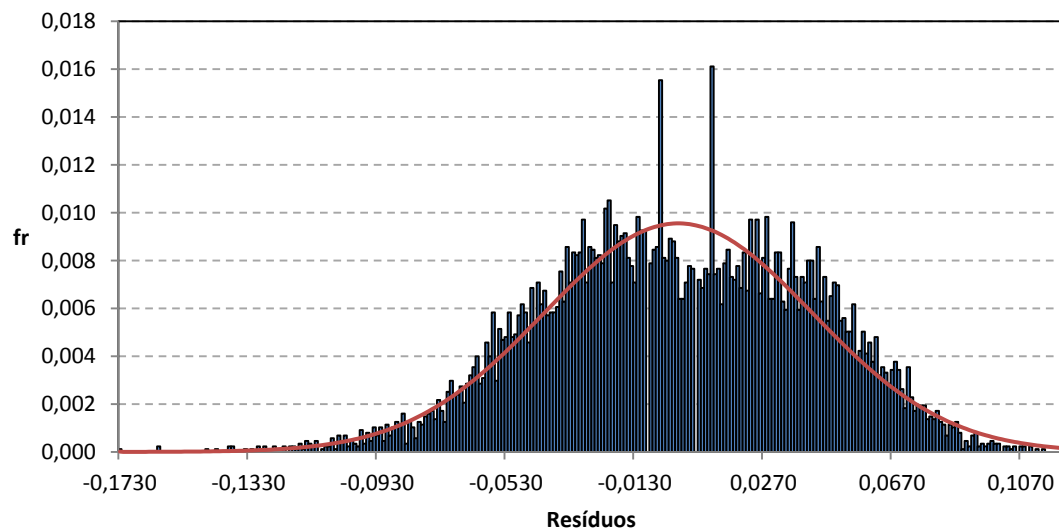
**Figura 30** – Resíduos obtidos no ajustamento da série de 2007 após a correção do efeito atmosférico, sem ter removido a SA.



**Figura 31** – Resíduos obtidos no ajustamento da série de 2007 após a correção do efeito atmosférico, removendo a SA previamente.

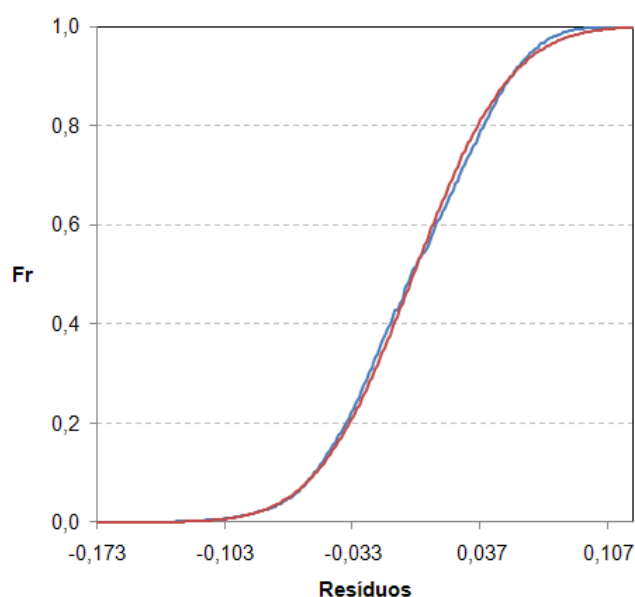
Para melhorar os resultados e, uma vez que é realizada uma média móvel que introduz problemas nos extremos da série foram removidas algumas alturas de maré filtradas antes do ajustamento pelo MMQ. Como se pode verificar nas Figuras 30 e 31, a remoção da SA antes de aplicar o filtro traz uma melhoria significativa no ajustamento. Passamos de resíduos na ordem dos 23 cm para os 14 cm. Neste método, ao contrário do anterior verifica-se a existência de algo que não foi modelado ou foi mal modelado, uma vez que o resíduo final não é ruído

branco. Aplicando o teste de Kolmogorov-Smirnov a esta série de resíduos, a hipótese de ter uma distribuição normal é rejeitada, como supúnhamos, pois  $D_{8750} \approx 0,0373 > D_{0,05} \approx 0,0145$ . Podemos comparar na Figura 32 a distribuição dos resíduos obtidos no ajustamento e a distribuição normal. Verificamos que o histograma parece não estar centrado com o valor médio e, tal como nos resíduos obtidos no ajustamento sem efectuar qualquer correcção (Figura 27), há uma ligeira assimetria, neste caso para a esquerda, para além de um comportamento estranho do histograma em torno do valor médio.



**Figura 32** – Histograma dos resíduos obtidos no ajustamento final ao qual se sobrepõe a curva de Gauss com valor médio e desvio-padrão dos resíduos (0,000001 e 0,042).

Na Figura 33 podemos confirmar o que o teste de normalidade indicou: a distribuição dos resíduos não é normal. Comparando esta figura com a Figura 28-b concluímos que os resíduos desta distribuição se afastam mais da normal do que os resíduos obtidos no ajustamento onde foram realizadas as correcções em separado.



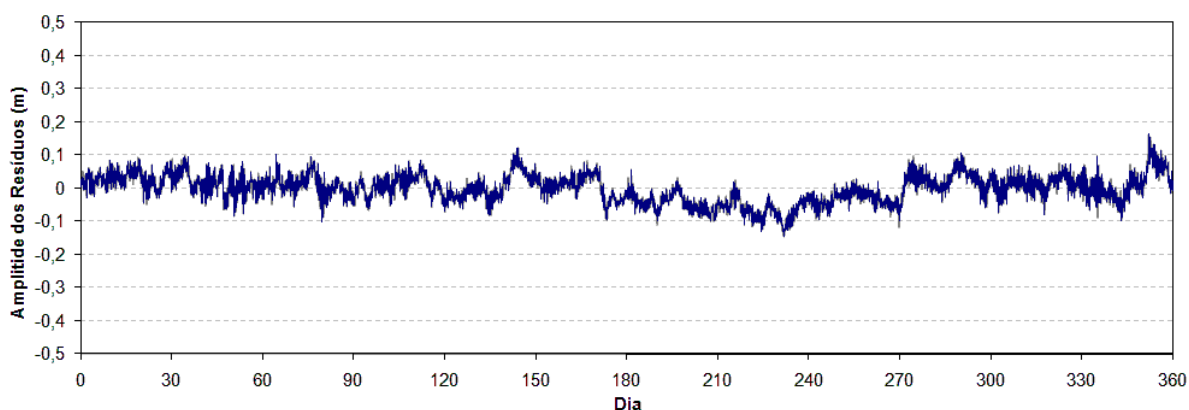
**Figura 33** – Polígono de frequências acumuladas da distribuição normal (vermelho) e distribuição de resíduos obtidos no ajustamento (azul).

No apêndice B podemos verificar a evolução, à medida que vão sendo realizadas as correcções, do EMQ do ajustamento, os resíduos mínimo e máximo da série e a amplitude e fase para as constituintes  $M_2$  e  $S_2$ .

### 3.1.3. Escolha da metodologia

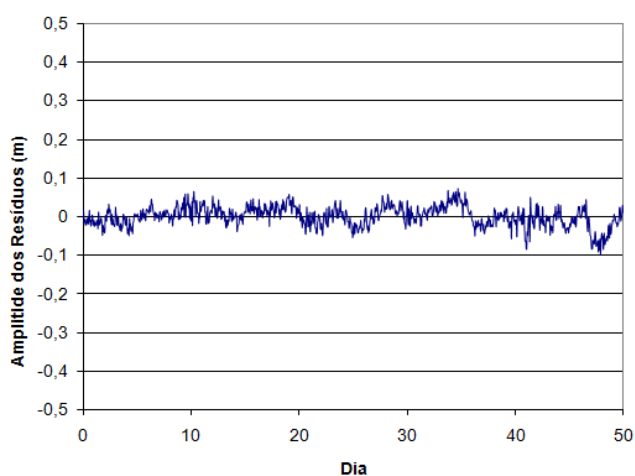
Através da análise dos resultados verificamos que conseguimos obter resultados aceitáveis nas duas metodologias, embora na primeira consigamos modelar melhor os efeitos não harmónicos que influenciam a onda de maré. Verificamos que em qualquer das metodologias utilizadas a remoção prévia da constituinte SA traz benefícios aos resultados do ajustamento, como referido por Antunes (2010).

Nas duas metodologias as falhas (*gaps*) na série de dados resultam em resíduos de maior amplitude. No caso da análise espectral, estas provocam o efeito *leakage* referido em 2.1.2. No caso de utilizarmos a primeira metodologia, uma falha numa observação provoca resíduos maiores, como se pode verificar na Figura 34 em que processámos a série de 2007 à qual apenas removemos uma única observação: dia 19 de Fevereiro às 0h. Comparando esta figura com a Figura 25 podemos verificar uma maior variação nos resíduos que atingem no máximo 17 cm, quando há uma falha e 10 cm, na série completa. No apêndice E podemos analisar os resultados deste ajustamento. Ora, uma grande parte das séries que vamos usar no processamento tem falhas. Assim, temos de usar outros meios para definir qual dos métodos a seguir.



**Figura 34** – Resíduos obtidos após o processamento da série de 2007 à qual foi removida uma observação.

Como referimos atrás, matematicamente, apenas necessitamos de uma série horária de 1 dia e 23 horas para determinar constantes harmónicas de 23 constituintes e  $Z_0$ . No programa que utilizamos não conseguimos aplicar o MMQ pois não consegue inverter a normal  $A^T A$ , sendo  $A$  a matriz jacobiana definida em (40). Se considerarmos uma série que contém as alturas horárias dos primeiros 50 dias do ano de 2007 obtemos os resíduos que se encontram representados na Figura 35. A análise destes resíduos parece contradizer o que foi dito anteriormente. Verificamos que, em módulo o resíduo atinge no máximo 10 cm, tal como o resíduo obtido no ajustamento final usando a primeira metodologia. Mas analisando os valores obtidos para as constantes harmónicas de  $M_2$  e  $S_2$  verificamos que a constituinte  $S_2$  não ficou bem determinada, obtendo os valores absurdos de 4,562 m para a amplitude e  $193,05^\circ$  para a fase. Significa então que séries muito curtas de alturas de maré podem levar-nos a valores absurdos, não exactos ou enviesados. No apêndice F podemos analisar as precisões do ajustamento desta série de 50 dias de 2007.



**Figura 35** – Resíduos obtidos após o processamento da série que contém os primeiros 50 dias de 2007.

Através da análise da Tabela 1 podemos verificar que, estatisticamente, a melhor metodologia é efectuar a correcção separada do EBI e do modelo residual, pois tem EMQ mais baixo. Podemos verificar que se obtêm valores muito próximos para as amplitudes de  $M_2$  e  $S_2$  pois a diferença entre os valores obtidos nas duas metodologias é da ordem dos 3 mm. Na fase destas constituintes, a diferença entre os valores obtidos nas duas metodologias é da ordem dos 0,73°. Contudo a precisão das constantes harmónicas é pior quando efectuamos uma correcção conjunta dos efeitos atmosféricos através da aplicação de um filtro no domínio espectral, com valores aceitáveis das constantes harmónicas.

**Tabela 1** – EMQ do ajustamento, resíduos máximo e mínimo e constantes harmónicas de  $M_2$  e  $S_2$  obtidos nas duas metodologias.

	Correcção em duas fases				Correcção conjunta dos efeitos			
E. M. Q. do ajustamento	0,021				0,042			
Resíduo máximo	0,09				0,12			
Resíduo mínimo	-0,10				-0,17			
	H [m]	Desvio padrão	g [°]	Desvio padrão	H [m]	Desvio padrão	g [°]	Desvio padrão
$M_2$	0,991	0,0003	93,34	0,0003	0,988	0,0007	93,36	0,0007
$S_2$	0,346	0,0003	120,20	0,0009	0,344	0,0006	120,93	0,0018

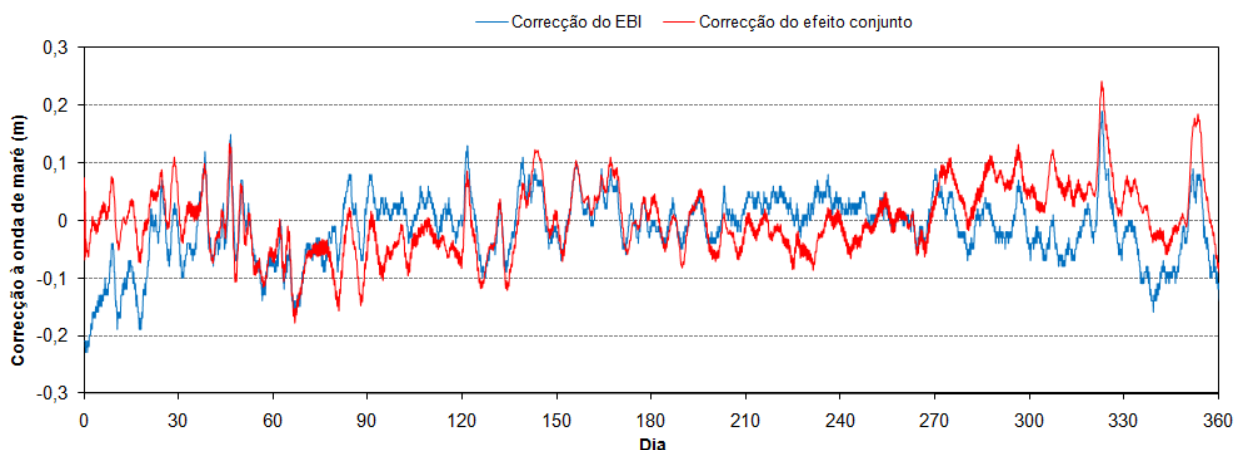
Os valores que obtivemos para o EMQ do ajustamento e para os resíduos quando efectuamos a correcção conjunta dos efeitos atmosféricos são muito próximos dos valores obtidos na primeira metodologia após a correcção do EBI (Tabela 2). Este facto leva-nos a crer que com a análise espectral conseguimos modelar os efeitos da variação de pressão e não os dois efeitos atmosféricos que pretendíamos, este facto é corroborado pelos valores apresentados na Tabela 2.

**Tabela 2** – EMQ do ajustamento, resíduos máximo e mínimo quando se efectua apenas a correcção do EBI e a correcção conjunta dos efeitos.

	Correcção do EBI	Correcção conjunta dos efeitos
E. M. Q. do ajustamento	0,043	0,042
Resíduo máximo	0,17	0,12
Resíduo mínimo	-0,15	-0,17

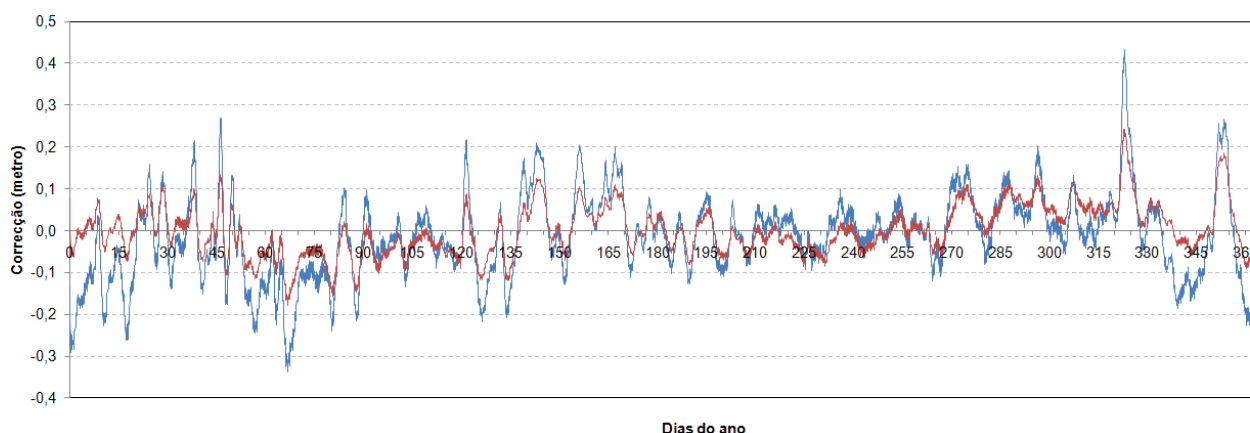


Na Figura 36 podemos verificar que as duas correcções têm oscilações semelhantes ao longo do ano, chegando até a estar sobrepostas durante alguns períodos. Significa que a correcção conjunta dos efeitos (por via do filtro espectral) corrige, nalguns momentos o EBI, mas de facto não parece conseguir modelá-la de forma eficaz na totalidade do período de dados. Esta diferença entre as duas correcções significa que através da análise espectral estamos a corrigir algo mais para além do EBI – o vento, mas não totalmente.



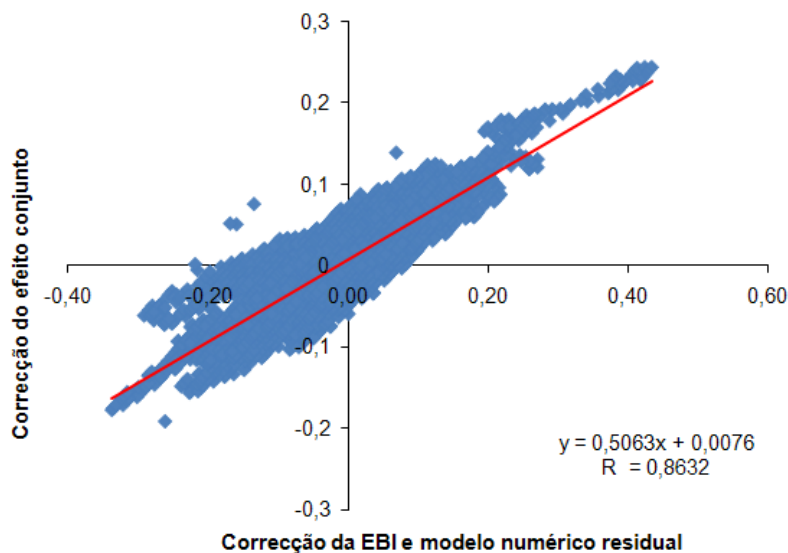
**Figura 36** – Correção do EBI e correcção conjunta dos efeitos atmosféricos obtidas nas duas metodologias.

Uma vez que o pressuposto (a correcção conjunta dos efeitos por via do filtro espectral modelar apenas o EBI) não se verificou, comparámos a correcção total realizada nas duas metodologias. Na primeira metodologia efectuámos duas correcções (a azul): EBI e modelo numérico residual; na segunda metodologia efectuámos a correcção conjunta dos efeitos (a vermelho). Na Figura 37 podemos comparar essas duas correcções. Verificamos que existe um desfasamento nas correcções mas estas parecem ter a mesma oscilação. Este desfasamento poderá dever-se ao facto de a função (50) não ser a mais adequada para o efeito pretendido.



**Figura 37** – Correção do efeito conjunto (vermelho) e soma das correcções do EBI e modelo numérico residual (azul).

Como parece existir uma relação entre as correcções efectuadas, fomos estudar a correlação destas. Na Figura 38 está representado o diagrama de dispersão dos pontos (X,Y), onde X é a correcção em duas fases (EBI e modelo numérico residual) e Y é a correcção do efeito conjunto por via da análise espectral. Concluimos que existe uma correlação forte ( $R=0,8632$ ) entre estas duas correcções, o que significa que estas tendem a efectuar, de forma significativa, as correcções do mesmo modo.



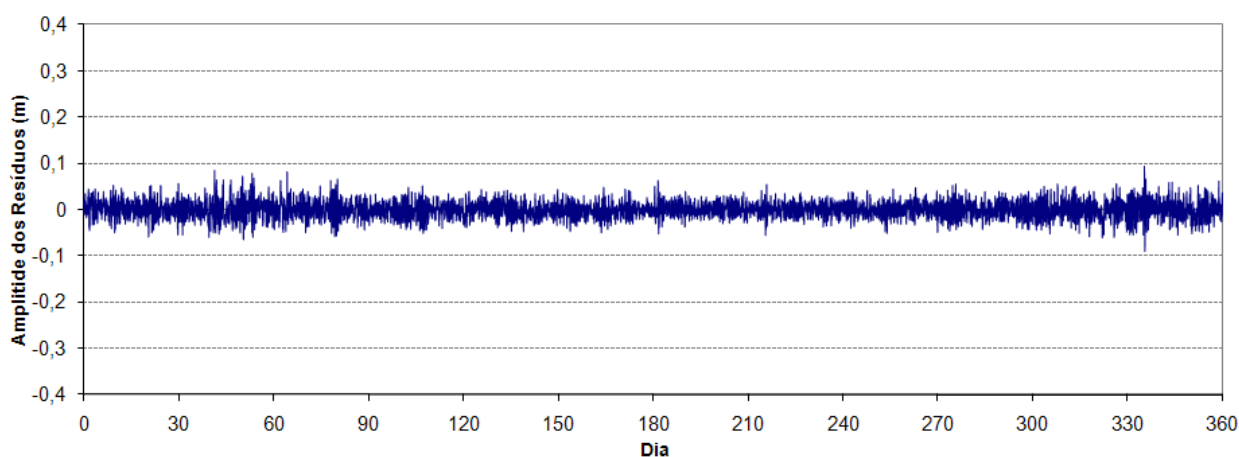
**Figura 38** – Diagrama de dispersão das duas correcções efectuadas.

Pelos resultados obtidos nos testes de Kolmogorov-Smirnov aplicados aos resíduos dos ajustamentos utilizando as duas metodologias na correcção dos efeitos não astronómicos; a aproximação da distribuição de resíduos obtidos no ajustamento à curva de Gauss e existindo correlação entre as correcções utilizadas nas duas metodologias parece-nos que a melhor metodologia para remover os efeitos atmosféricos é aquela em que efectuamos as correcções em separado: correcção do EBI e do efeito do vento, esta através de um modelo numérico de tendência residual. Existe, no entanto, um problema: apenas as séries mais recentes (do novo marégrafo de Cascais) contêm valores horários de pressão atmosférica. Para resolver este problema reduzimos, na primeira metodologia, a correcção total do forçamento atmosférico a uma única correcção, incluindo ambos os efeitos, EBI e vento, num único modelo numérico de tendência residual. No ponto seguinte vamos descrever a metodologia que foi aplicada a todas as séries de alturas de maré.

### 3.2. Metodologia aplicada a todas as séries

Vamos definir agora a metodologia que aplicaremos a todas as séries do período em estudo. No MMQ são necessários valores iniciais dos parâmetros que pretendemos determinar, amplitude e fase de cada constituinte. Como já referimos antes, estes valores iniciais são resultados obtidos num processamento anterior, neste caso utilizamos os valores obtidos no processamento da série de alturas horárias de 2007. A velocidade de cada constituinte e as correcções nodais em relação à maré de equilíbrio para cada ano são conhecidas (Service Hydrographique et Oceanographique de la Marine, 1982). As constituintes que vão ser utilizadas na modelação da onda de maré são as que têm amplitude inicial superior a 0,003 m. Assim, esta condição resulta na utilização de 24 constituintes para modelar a onda de maré, uma das quais, a SA é modelada fora da análise harmónica, da forma referida em 2.2.4.

O primeiro passo a dar no processamento de cada série de alturas de maré é modelar e remover a SA das épocas observadas. Após um primeiro ajustamento aplicamos aos resíduos obtidos, que estão representados na Figura 22, uma média móvel de 25 valores. Com a nova série de resíduos suavizados, utilizamos a fórmula inversa de (47) para obter um valor que designamos por valor sintético de pressão. No final, usando a série inicial à qual acrescentamos o valor sintético de pressão, processamos os dados usando o programa *harm5.for*. Seguindo a metodologia descrita para a série de alturas observadas em 2007 e, sem utilizar os valores de pressão atmosférica observada, obtemos resultados muito semelhantes aos que se obtêm quando usamos a pressão atmosférica observada. Na Figura 39 estão representados os resíduos obtidos através desta metodologia. Pela análise desta figura, concluímos que os resíduos obtidos têm a mesma ordem de grandeza e estrutura que os do ajustamento em que usamos a pressão atmosférica observada (Figura 25). É de referir que esta pressão atmosférica sintética contém o efeito do forçamento atmosférico total, da pressão atmosférica e vento.



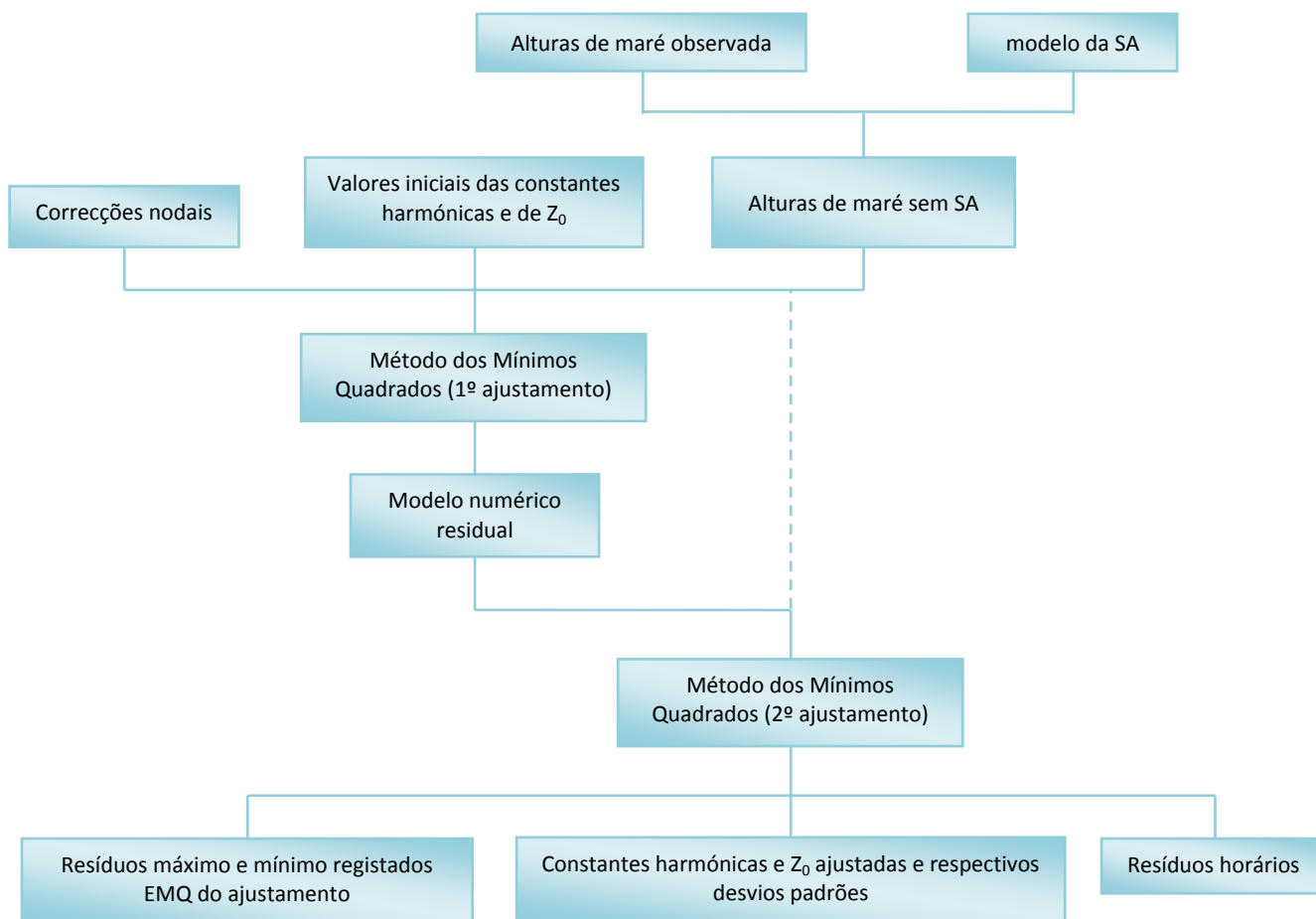
**Figura 39** – Resíduos obtidos na série de 2007 usando valores sintéticos de pressão.

Os resíduos só por si não podem ser o único elemento para considerar esta nova metodologia como aceite e correcta. Na Tabela 3 podemos comparar os resultados estatísticos e as constantes harmónicas de  $M_2$  e  $S_2$  obtidos para 2007 usando, ou não, o valor observado de pressão atmosférica. Verificamos que os valores são concordantes com uma ligeira diferença em  $S_2$ , uma diferença de 0,5 cm na amplitude de  $S_2$  que é significativa face à precisão obtida nos ajustamentos. Concluimos que desta forma conseguimos obter resultados aceitáveis, no caso de não termos valores de pressão atmosférica. Não mostramos o resultado do teste de normalidade dos resíduos pois foi semelhante ao obtido em 3.1.1., na série de 2007 com valores de pressão atmosférica observada.

**Tabela 3** – EMQ do ajustamento, resíduos máximo e mínimo e constantes harmónicas de  $M_2$  e  $S_2$  usando ou não a pressão atmosférica observada.

	Com pressão atmosférica observada				Sem pressão atmosférica observada			
E. M. Q. do ajustamento	0,021				0,019			
Resíduo máximo	0,09				0,09			
Resíduo mínimo	-0,10				-0,09			
	H [m]	Desvio padrão	g [°]	Desvio padrão	H [m]	Desvio padrão	g [°]	Desvio padrão
$M_2$	0,991	0,0003	93,34	0,0003	0,991	0,0003	93,36	0,0003
$S_2$	0,346	0,0003	120,20	0,0009	0,351	0,0003	120,91	0,0008

Assim, obtivemos uma metodologia para processar os dados das várias séries anuais sem ser necessário conhecer os valores da pressão atmosférica observada, apenas precisamos dos valores das alturas horárias da maré. Na Figura 40 encontra-se o esquema seguido em todas as séries. Sempre que possível, utilizamos a pressão atmosférica observada, tendo calculado os efeitos do vento da forma descrita em 3.1.1. Apenas se utilizaram os valores de pressão atmosférica observada para os anos de 2006 e 2007. O modelo numérico residual referido no esquema é diferente caso se tenham os valores de pressão atmosférica observada ou não. Se conhecermos os valores de pressão atmosférica, deve ser efectuada uma correcção do EBI às alturas de maré, às quais foi removida a SA previamente, e assim o modelo numérico residual será um modelo dos efeitos do vento. No caso de não possuímos os valores de pressão atmosférica, através do modelo numérico residual determinamos valores sintéticos de pressão que corrigem os efeitos do vento e da variação de pressão atmosférica.



**Figura 40** – Metodologia aplicada a todas as séries de alturas de maré.

Os resultados obtidos são validados estatisticamente. Após o ajustamento obtemos o EMQ que nos dá a precisão do ajustamento e para cada constante determinada (amplitude e fase) obtemos o desvio padrão, que nos dá precisão da respectiva constante.

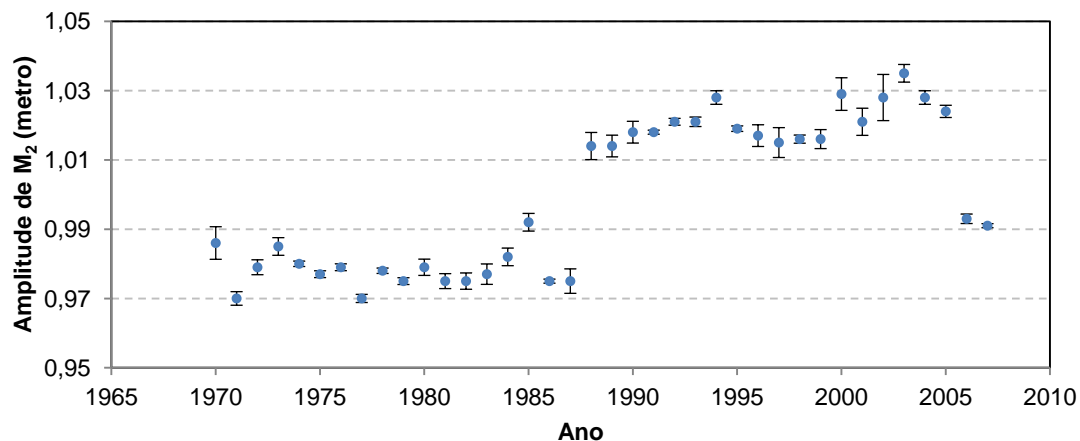
## 4. Resultados

As séries anuais de alturas de maré processadas foram as séries entre 1970 e 2007. Não foram processadas séries de anos anteriores por não possuímos os valores das correcções nodais em relação à maré de equilíbrio para esses anos. Das séries processadas, apenas em 1970 e em 2000 temos menos de 6 meses de dados que, como veremos a seguir, comprometem os resultados.

No processamento de dados determinámos as constantes harmónicas (amplitude e fase) de 23 constituintes:  $J_1$ ,  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $L_2$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ ,  $M_4$ ,  $N_2$ ,  $2N_2$ ,  $O_1$ ,  $P_1$ ,  $Q_1$ ,  $2Q_1$ ,  $R_2$ ,  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $T_2$ ,  $Lam_2$ ,  $Mu_2$ ,  $Nu_2$ ,  $Rho_1$ ,  $Ms_4$  e  $Msf$ . Para além destes valores também foram determinados o nível médio do mar,  $Z_0$ , e a constituinte sazonal de longo período, através da SA. Para efectuar um estudo estatístico dos resultados, calculámos o EMQ do ajustamento, o número de graus de liberdade e, para cada parâmetro estimado, a sua precisão, resultante da matriz de variâncias e co-variâncias *a posteriori*.

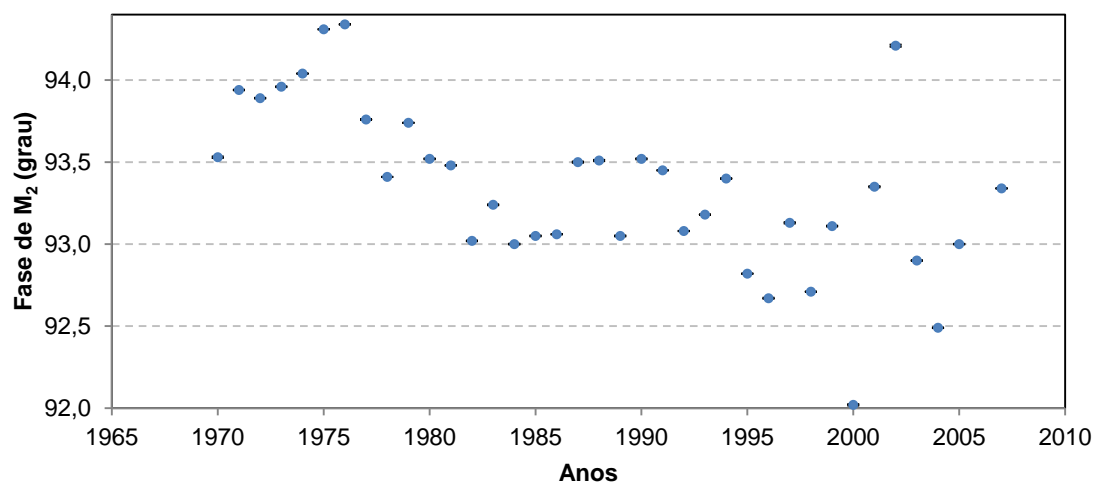
Um dos objectivos deste trabalho é estudar a variação temporal das principais constituintes harmónicas:  $M_2$  e  $S_2$ , pelo que vamos dar importância apenas aos resultados obtidos para estas constituintes. No Apêndice C encontramos duas tabelas (uma para a  $M_2$  e outra para a  $S_2$ ) com os resultados anuais obtidos para estas constituintes, optando por mostrar aqui apenas os gráficos que ilustram a evolução de cada constante (amplitude e fase de cada constituinte). Nestes gráficos para além de mostrar o valor anual obtido é indicado o erro que lhe está associado através do intervalo definido pelos traços de cada ponto na direcção do eixo das ordenadas.

A constituinte  $M_2$  representa a maré que se deve ao movimento de uma lua fictícia (lua média) que percorre o equador com movimento uniforme e sempre à mesma distância média da Terra. Este movimento origina duas preias-mar e duas baixas-mar sendo por isso designada por constituinte lunar principal semi-diurna. Esta é a constituinte de maior amplitude e tem o dobro da velocidade média do movimento aparente da Lua. Na Figura 41 estão representadas as amplitudes desta constituinte obtidas para o período em estudo. Nesta figura verificamos a existência de uma variabilidade nos valores da amplitude. Comparando os resultados obtidos nos vários anos (apêndice C), em 2002 temos uma precisão inferior à dos resultados obtidos nos outros anos. Parecem existir valores que fogem do que se está a passar, por exemplo, em 1986, 1987, 2006 e 2007. No geral, a amplitude tem vindo a aumentar. Os valores obtidos para 2006 e 2007 estão distantes dos restantes, tal pode estar relacionado com o facto de as séries utilizadas terem sido obtidas no novo marégrafo de Cascais.



**Figura 41** – Amplitude de  $M_2$  entre 1970 e 2007.

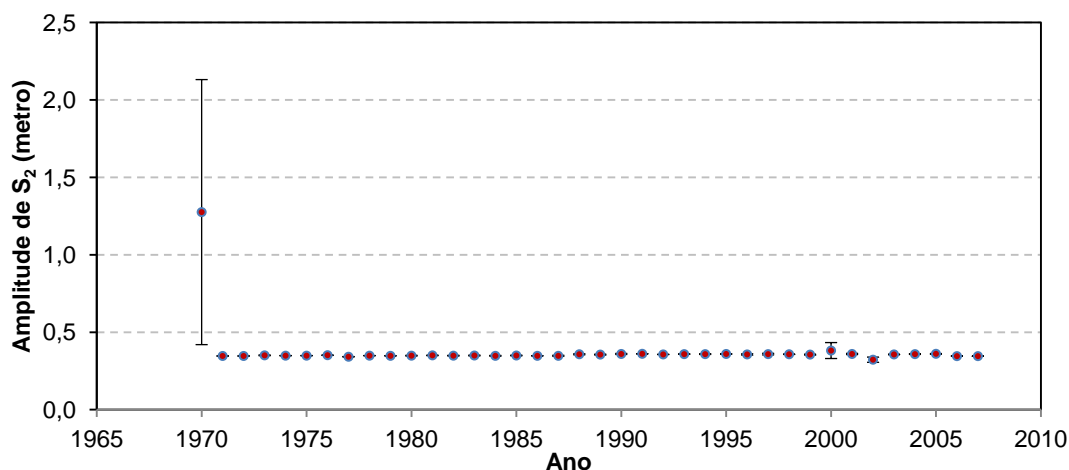
Na Figura 42, estão representados os valores obtidos para a fase de  $M_2$  ao longo destes anos. Existem valores, em 2000 e 2002, que parecem sobressair por estarem afastados do resto. O valor estimado para 2006, que pode ser observado no Apêndice C, não foi representado uma vez que estava claramente mal determinado (na ordem dos  $351^\circ$ ) não tendo sido encontrado qualquer motivo para este valor. Na generalidade, a fase parece estar a diminuir ao longo do tempo.



**Figura 42** – Fase de  $M_2$  entre 1970 e 2007.

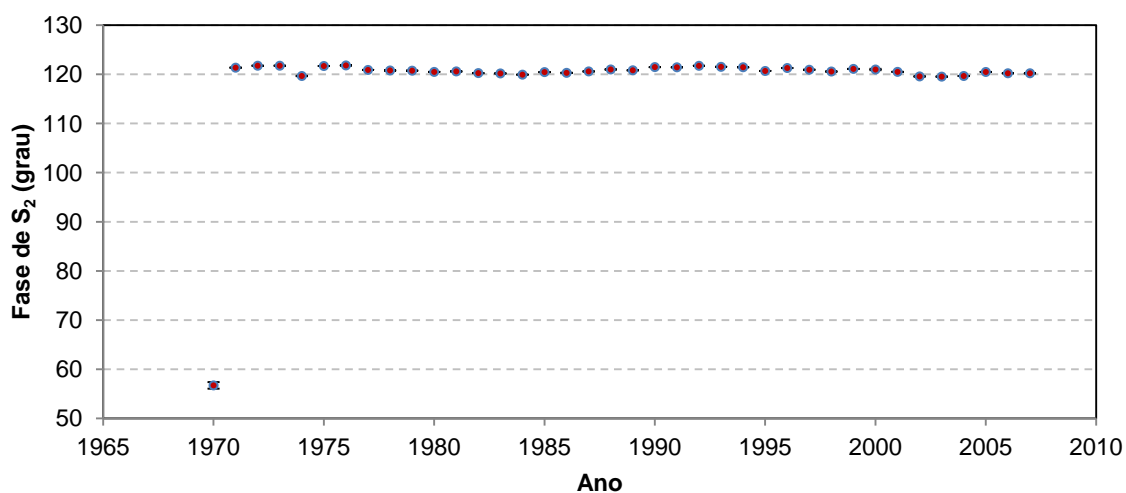
A constituinte  $S_2$  representa a maré que se deve ao movimento de um sol fictício (sol médio) que percorre o equador com movimento uniforme e sempre à mesma distância média da Terra. Esta é designada por constituinte solar principal semi-diurna e é a constituinte com a segunda maior amplitude. Dada a escala de representação na Figura 43, verificamos a existência de um

valor estimado, em 1970, que provoca uma leitura errada dos resultados. De notar que em 2000, temos pouca precisão da amplitude. Estes resultados para 1970 e 2000 podem dever-se ao facto de as respectivas séries possuírem menos de 6 meses de alturas horárias observadas.



**Figura 43** – Amplitude de S<sub>2</sub> entre 1970 e 2007.

Em relação à fase de S<sub>2</sub>, verificamos a mesma situação que na amplitude (Figura 44). A fase obtida para esta constituinte em 1970 está a enviesar os resultados. Dada a escala de representação parece não existir variação desta constante.



**Figura 44** – Fase de S<sub>2</sub> entre 1970 e 2007.

Um *outlier* é um dado que se afasta dos outros valores. Nas Figuras 41 a 44, verifica-se a existência de *outliers* que provocam um desfaseamento na tendência dos vários anos. Assim, fomos determinar estatisticamente esses *outliers*. Para determinar os *outliers* de cada constante harmónica seguindo o critério apresentado no sítio <http://www.alea.pt>, começámos

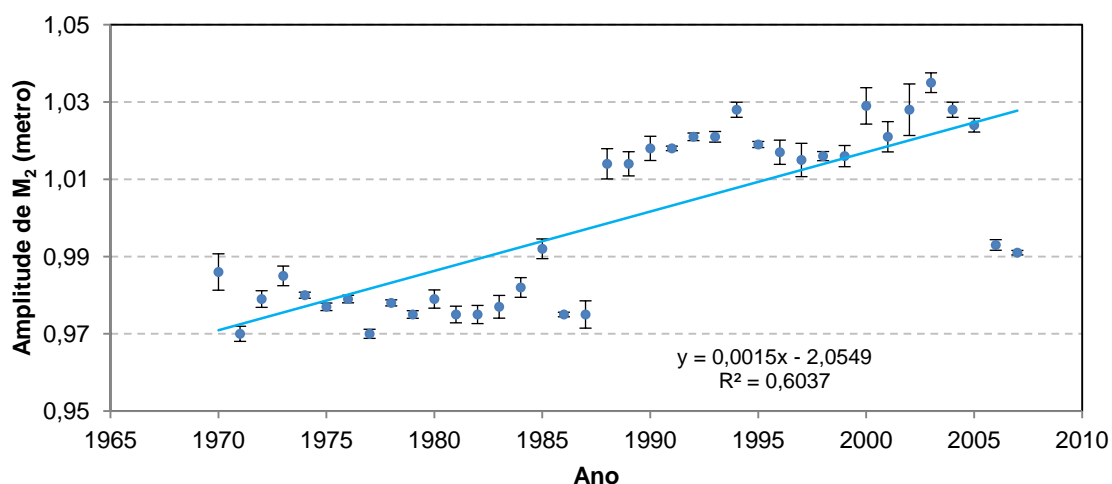


por calcular a AIQ (Amplitude Inter-Quartis) de cada constante, através do primeiro e terceiro quartis ( $Q_1$  e  $Q_3$ ). O primeiro quartil é o valor tal que 25% dos dados são menores ou iguais a esse valor e pelo menos 75% dos dados são maiores ou iguais e o terceiro quartil é o valor tal que 75% dos dados são menores ou iguais a esse valor e pelo menos 25% dos dados são maiores ou iguais. A partir da AIQ determinámos a BI (Barreira Inferior) e a BS (Barreira Superior) que se encontram na Tabela 4. Um valor é considerado *outlier* se for inferior à barreira inferior ou se for superior à barreira superior. Em relação à amplitude de  $M_2$  não foram obtidos *outliers*, mas na fase obtivemos *outliers* nos anos de 1975, 1976, 2000 e 2006. No caso de  $S_2$ , obtivemos *outliers* para a sua amplitude em 1970, 2000 e 2002 e na fase em 1970.

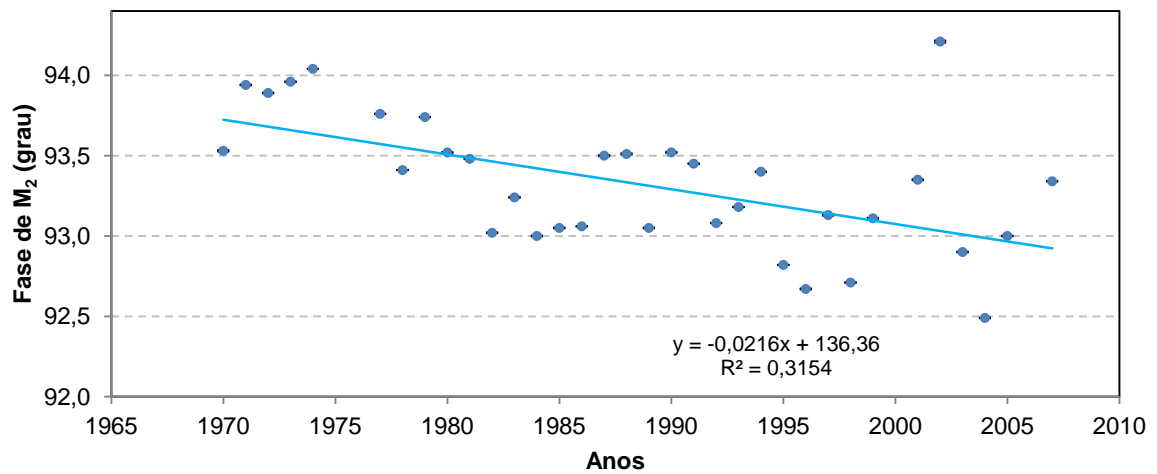
**Tabela 4** – Amplitude interquartis, barreira inferior e barreira superior para a amplitude e fase de  $M_2$  e  $S_2$ .

	$M_2$		$S_2$	
	Amplitude	Fase	Amplitude	Fase
Mínimo	0,97	92,02	0,32	56,69
$Q_1$	0,98	93,05	0,35	120,25
$Q_3$	1,02	93,53	0,36	121,32
Máximo	1,04	94,34	1,28	121,80
$AIQ = Q_3 - Q_1$	0,04	0,48	0,01	1,07
$BI = Q_1 - 1,5 \times AIQ$	0,92	92,33	0,33	118,65
$BS = Q_1 + 1,5 \times AIQ$	1,08	94,25	0,38	122,93

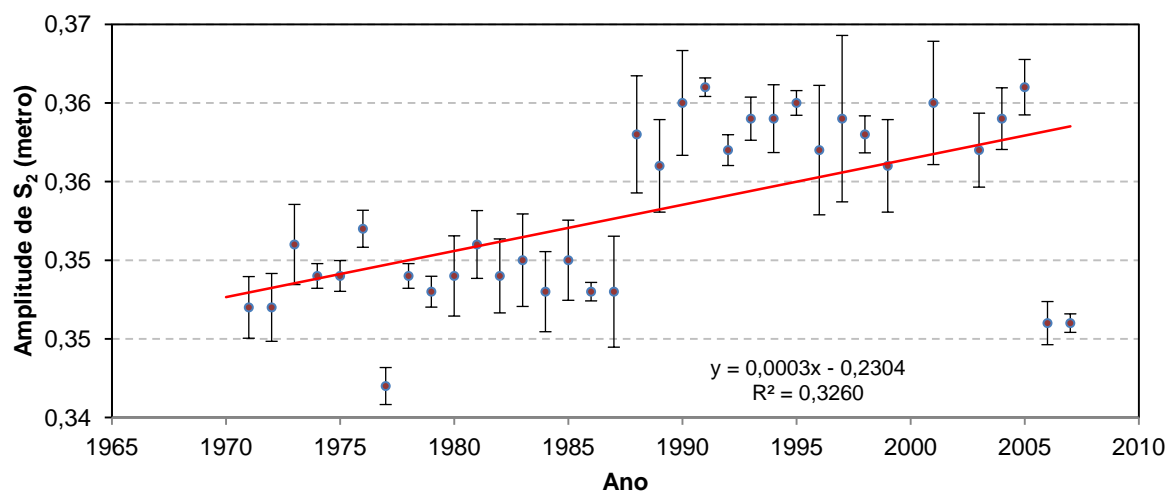
Após a remoção dos *outliers* desenhámos a tendência linear de cada constante obtendo os gráficos que se podem observar nas Figuras 45 a 48. Concluímos que a fase da constituinte  $M_2$  está a aumentar e a fase está a diminuir, embora de forma mais irregular. Tal como a constituinte  $M_2$ , na constituinte  $S_2$  verificamos um aumento de amplitude, com menor precisão nos resultados, e uma redução da fase.



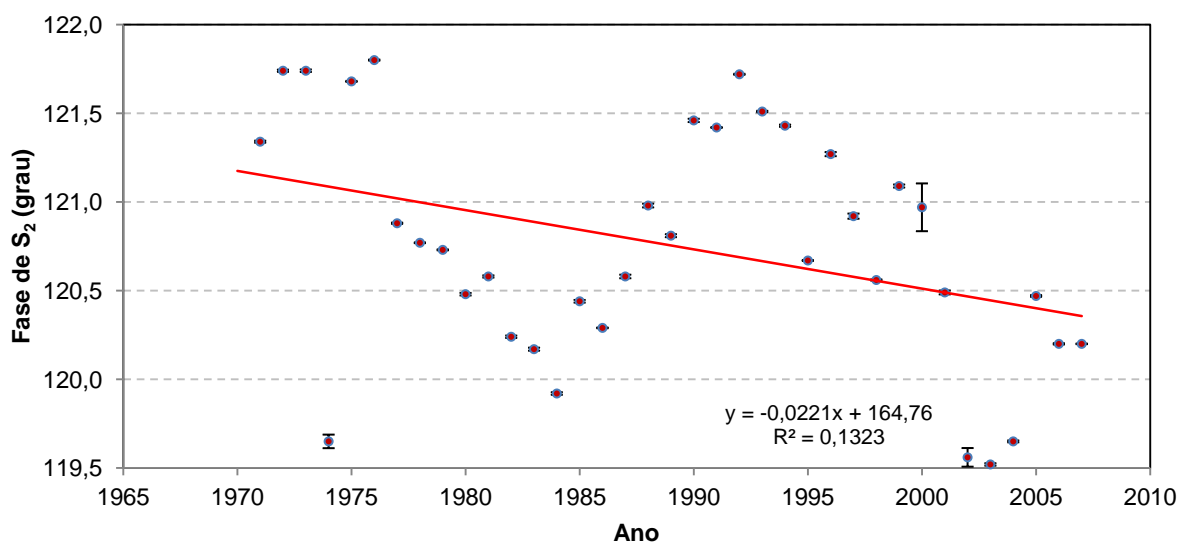
**Figura 45** – Amplitude de  $M_2$  com linha de tendência, após a remoção de *outliers*.



**Figura 46** – Fase de  $M_2$  com linha de tendência, após a remoção de *outliers*.



**Figura 47** – Amplitude de  $S_2$  com linha de tendência, após a remoção de *outliers*.



**Figura 48** – Fase de  $S_2$  com linha de tendência, após a remoção de *outliers*.

Na Tabela 5 podemos ver os coeficientes de correlação entre os anos e a amplitude ou fase de cada constituinte que estamos a estudar. Estes coeficientes mostram uma correlação moderada a forte entre as variáveis em causa excepto na fase de  $S_2$  que podemos considerar fraca.

**Tabela 5** – Coeficientes de correlação entre os anos e a amplitude ou fase de  $M_2$  e  $S_2$ .

		Coeficiente de Correlação
$M_2$	Amplitude	0,777
	Fase	- 0,562
$S_2$	Amplitude	0,571
	Fase	- 0,364

## 5. Conclusão

A mudança de variável proposta por Forman (2009) para a equação (36), desenvolvida em 2.2.4. foi muito importante no progresso deste trabalho. Esta tornou o programa *harm.for* mais eficiente uma vez que a convergência para a solução é mais rápida e não necessita da intervenção do utilizador. Esta alteração no programa veio revelar grande evolução nos resultados que estavam a ser obtidos no DEGGE.

A separação da maré de origem astronómica da componente não astronómica foi muito importante para a qualidade dos resultados obtidos. Tal como referido Antunes (2010), Pugh (2004) e Foreman (2009), na análise harmónica modelamos somente a componente astronómica pelo que o modelo será tanto melhor quanto melhor for a modelação da componente não harmónica, seja ela sazonal ou não periódica. Neste trabalho consideramos que a componente não harmónica se deve ao forçamento atmosférico: variação de pressão atmosférica e efeito do vento; apesar de existirem outros factores que influenciam a onda de maré em zonas de águas pouco profundas. A definição de uma metodologia permitiu processar todas as séries horárias de alturas de maré de igual forma. Apesar de a constituinte SA se poder determinar através da análise harmónica, este método revelou-se ineficaz. Uma vez que o período da SA é de um ano e o efeito sazonal do vento também é anual, optámos por efectuar a modelação conjunta destes dois parâmetros fora da análise harmónica, usando a metodologia definida por Antunes (2010) de onde obtivemos uma melhoria nos resultados.

A modelação do forçamento atmosférico teve grande importância neste trabalho. Por um lado, foi desenvolvida uma metodologia para modelar este efeito para séries para as quais não existiam valores de pressão atmosférica observada. Esta metodologia pode aplicar-se a qualquer série de alturas de maré. Por outro lado, permitiu a pesquisa de uma forma de modelação diferente da que era utilizada no DEGGE, que tinha como base a análise espectral. Apesar de os resultados obtidos na análise espectral terem sido satisfatórios estes não foram melhores que os obtidos na utilização dos resíduos de um primeiro ajustamento. Pensamos que ainda devem ser efectuadas mais pesquisas no sentido de melhorar os resultados obtidos através do método de análise espectral aqui exposto.

Uma constituinte harmónica é representada por uma onda pelo que é caracterizada por uma amplitude, uma fase e um período. Através da análise harmónica determinamos as constantes harmónicas, amplitude e fase, das constituintes principais,  $M_2$  e  $S_2$ , para cada ano do período em estudo. O período de cada constituinte é assumido como constante ao longo dos anos pelo que não foi alvo de estudo. Mas uma vez que utilizámos a análise espectral durante o trabalho pudemos confirmar esta afirmação. No anexo D encontram-se as velocidades obtidas para cada constituinte. Para determinar o período temos de calcular o quociente entre  $360^\circ$  e a

velocidade. Em média, as velocidades são as que usámos durante o trabalho, 28,98 %/h para  $M_2$  e 30,00 %/h para  $S_2$ , mas nalguns anos afastaram-se até 0,04 %/h. Esta variabilidade poderá dever-se ao efeito *picket fence* referido em 2.1.2. uma vez que as séries não tinham todas o mesmo número de dados.

A constituinte  $M_2$  está relacionada como o movimento da Lua e uma vez que este é o astro que se encontra mais próximo da Terra, esta é a constituinte que mais influência tem na altura de maré. Esta constituinte é a de maior amplitude e, pelos resultados obtidos, podemos verificar que esta fica calculada com maior precisão quando comparada com a das restantes constituintes. Segundo Pugh (2004) todas as constituintes que estão relacionadas com a Lua têm um período de 18,6 anos que corresponde ao período nodal. Na amplitude desta constituinte (Figura 45) é interessante verificar a existência de dois blocos com cerca de 17 anos que mantêm uma oscilação reduzida, passado esse período “salta” para o outro bloco. Parece que nos últimos anos processados “saltámos” para um bloco de menor amplitude ou então existe uma descontinuidade nos coeficientes da maré de equilíbrio que só a continuação deste estudo poderá confirmar. No geral, podemos dizer que a amplitude desta constituinte está a aumentar 1,5 mm por ano, apesar de existir grande oscilação. Em relação à fase, esta é bastante irregular, mas no geral, está a diminuir cerca de 0,02° por ano. O estudo a nível mundial realizado por Woodworth (2010) permite comparar os resultados aqui obtidos no sentido de validar as nossas conclusões. Um dos problemas deste estudo está no facto de, para a Europa, os resultados aparecerem num gráfico em que a escala não permite grande rigor em termos numéricos. Neste estudo, a amplitude de  $M_2$  também está a aumentar a um a taxa superior a 0,02% por ano e na fase existe uma diminuição de cerca de 0,02% por ano. Estes resultados podem estar associados à desaceleração da rotação da Terra.

A constituinte  $S_2$  está relacionada com o movimento do Sol em torno da Terra. Por estar mais afastado da Terra do que a Lua, o Sol tem menor influência na modelação da altura de maré. Pensamos que por ter menos influência, para obtermos valores mais precisos de amplitude e fase desta constituinte deveríamos melhorar a modelação dos efeitos não astronómicos e possivelmente usar mais constituintes para modelar a componente astronómica. Apesar de a amplitude ter menor precisão, a fase de  $S_2$  parece-nos bem modelada. O ciclo de actividade solar tem uma duração de 11 anos. Tal como já foi referido para a amplitude de  $M_2$ , na amplitude de  $S_2$  é interessante verificar a existência de dois blocos de 12, 13 anos que mantêm uma oscilação reduzida. Nos últimos anos processados “saltámos” para o bloco de menor amplitude. Em relação à fase, esta parece ter um ciclo de 10 a 13 anos, olhando apenas para os máximos e mínimos, mas esquecendo alguns valores que ainda continua a sair do padrão. No geral, podemos dizer que a amplitude de  $S_2$  está a aumentar 0,3 mm por ano e a fase está a diminuir cerca de 0,02° por ano (diminuição igual à da fase de  $M_2$ ). Em relação ao trabalho

realizado por Woodworth (2010), verificamos que a amplitude está a aumentar a um a taxa superior a 0,02% por ano e a fase está praticamente sem movimentação.

Comparando os resultados, verificamos algumas discrepâncias entre os valores obtidos e os do estudo de Woodworth (2010). Estes desfasamentos poderão estar relacionados com a leitura dos gráficos de Woodworth (2010). Na movimentação das constantes, os resultados obtidos neste trabalho são coerentes com os do estudo. As amplitudes estão a aumentar e as fases estão a diminuir. Em relação à fase de  $S_2$ , dada a variabilidade dos resultados e a correlação ser mais fraca que as outras, pensamos que esta diminuição pode estar mal determinada.

A continuidade deste estudo, quer para anos anteriores a 1970, quer para anos posteriores a 2007, utilizando sempre dados do marégrafo antigo pode consolidar as nossas conclusões, sobretudo dar maior certeza aos valores obtidos. Verificamos que a amplitude de  $S_2$  é menos precisa do que a de  $M_2$  pelo que para dar mais consistência às conclusões temos de tornar mais exactos os resultados.

## Referências bibliográficas

- Antunes, A. (2006). *Análise de uma série de observações do marégrafo da Corunha de 1998 e 1999 com o programa VAV*. Relatório de Estágio, Universidad Complutense de Madrid.
- Antunes, C. e Godinho, J. (2011). Estudo da análise harmónica da maré aplicada ao marégrafo de Cascais. *VII Conferência Nacional de Cartografia e Geodesia*.
- Antunes, C. (2010). Monitorização da variação do nível do mar. *1ª Jornadas de Engenharia Hidrográfica*. Lisboa: Instituto Hidrográfico.
- Azevedo, M. (1994). *Teses, relatórios e trabalhos escolares: sugestões para a sua elaboração*. Lisboa: Faculdade de Ciência da Universidade de Lisboa, Departamento de Educação.
- Burden, R. L. e Faires, J. D. (1993). *Numerical analysis* (5ª ed.). Boston: Prindle, Weber and Schimdt.
- Dagnelis, P. (1973). *Estatística: teoria e métodos* (Vol. 1 e 2). Lisboa: Publicações Europa-América.
- Darwin, G. H. (2005). *The tides and kindred phenomena in the solar system*. London: Adamant Media Corporation .
- Davis, R. A. e FitzGerald, D. M. (2004). *Beaches and coasts*. Malden: Blackwell.
- Foreman, M. G. G.; Cherniawsky, J. Y. e Ballantyne, V. A. (2009). Versatile harmonic tidal analysis: improvements and applications. *Atmospheric and Oceanic Technology* , 26, 806-817.
- <http://wepages.fc.ul.pt/~cmantunes/hidrografia/hidro-mares.html>. (2011). Obtido em Março, Agosto de 2011
- <http://www.alea.pt>. (2011). Obtido em Junho de 2011
- <http://www.virtins.com/applications.shtml>. (s.d.). Obtido em 25 de Maio de 2011
- Kamphuis, J. W. (2010). *Introducing to coastal engineering and management* (2ª ed., Vols. 30 - Advanced series on ocean engineering). Singapura: World cientific.
- Marchuk, G. I. e Kagan, B. A. (1989). *Ocean dynamics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.
- Martins, L. e Reis, J. (2007). Nível médio, maré e análise harmónica. *5ª Jornadas Portuguesas de Engenharia Costeira e Portuária*.
- Mikhail, E. M. (1976). *Observations and least squares*. Nova Iorque: Dun-Donnelley Publisher.
- Moler, C. (2004). *Numerical computing with MatLab*. Massachusetts: SIAM.
- Moore, S. M. (2010). *The basic practice of statistic* (5ª ed.). Nova Iorque: W. H. Freeman.
- Organização Hidrográfica Internacional. (2005). *Manual on Hydrography* (1ª ed.). International Hydrographic Bureau.
- Pawlowicz, R., Beardsley, B. e Lentz, S. (2002). Classical tidal harmonic analysis including error estimates in MATLAB using T\_TIDE. *Computer & Geosciences* , 28, 929-937.
- Pinet, P. R. (2000). *Invitation to oceanography* (2ª ed.). Jones and Bartlett Publishers.
- Pugh, D. (2004). *Changing sea levels - Effects of tides weather and climate*. Cambridge: Cambridge University.
- Pugh, D. (1996). *Tides, surges and mean sea-level*. Chichester: John Wiley and Sons.

Service Hydrographique et Oceanographique de la Marine. (1982). *Table des marees de grands ports du monde*, N° 540. Paris: Brest.

Torge, W. (2001). *Geodesy* (3<sup>a</sup> ed.). Berlin: de Gruyter.

Woodworth, P. L. (2010). A survey of recent changes in the main components of the ocean tide. *Continental Shelf Research* , 30 (15), 1680-1691.



## Apêndices

### A. Efeitos das várias correcções no ajustamento

Nesta tabela encontra-se a evolução do EMQ do ajustamento bem como os resíduos máximo e mínimo (em metros) quando não efectuamos qualquer correcção, apenas corrigimos a SA, ou também o efeito barométrico inverso e finalmente quando a estas correcções juntamos um modelo numérico de tendência residual. Estes valores encontram-se em metro. Também se encontram a amplitude e fase das constituintes  $M_2$  e  $S_2$  em cada momento.

	Sem correcções		Correcção da SA					
			SA		efeito barométrico inverso		modelo numérico de tendência residual	
E. M. Q. do ajustamento	0,079		0,067		0,043		0,021	
Resíduo máximo	0,31		0,25		0,17		0,09	
Resíduo mínimo	-0,21		-0,21		-0,15		-0,10	
	H [m]	g [°]	H [m]	g [°]	H [m]	g [°]	H [m]	g [°]
$M_2$	0,991	93,35	0,991	93,35	0,991	93,34	0,991	93,34
Desvio padrão	0,0012	0,0013	0,0010	0,0011	0,0007	0,0007	0,0003	0,0003
$S_2$	0,351	120,93	0,351	120,93	0,346	120,20	0,346	120,20
Desvio padrão	0,0012	0,0034	0,0010	0,0029	0,0007	0,0019	0,0003	0,0009

### B. Efeitos da correcção única no ajustamento

Nesta tabela encontra-se a evolução do EMQ do ajustamento bem como os resíduos máximo e mínimo (em metros) quando efectuamos a remoção da SA antes de aplicar o filtro ou depois da sua aplicação. Estes valores encontram-se em metro. Também se encontram a amplitude e fase das constituintes  $M_2$  e  $S_2$  em cada momento.

	Correcção da SA depois de aplicar o filtro				Correcção da SA antes de aplicar o filtro			
E. M. Q. do ajustamento	0,071				0,042			
Resíduo máximo	0,20				0,12			
Resíduo mínimo	-0,32				-0,17			
	H [m]	Desvio padrão	g [°]	Desvio padrão	H [m]	Desvio padrão	g [°]	Desvio padrão
$M_2$	0,988	0,0011	93,36	0,0011	0,988	0,0007	93,36	0,0007
$S_2$	0,344	0,0011	120,92	0,0031	0,344	0,0006	120,93	0,0018

## C. Resultados obtidos no processamento

Resultados obtidos no processamento das séries anuais desde 1970 a 2007.

Ano	Graus de liberdade	EMQ	Resíduo Máximo	Resíduo Mínimo
1970	1404	0,055	0,22	-0,26
1971	8658	0,065	0,20	-0,25
1972	8606	0,070	0,32	-0,29
1973	8518	0,083	0,38	-0,40
1974	8707	0,026	0,12	-0,13
1975	8704	0,032	0,16	-0,16
1976	8733	0,037	0,37	-0,33
1977	8713	0,041	0,32	-0,32
1978	8710	0,025	0,17	-0,12
1979	8706	0,033	0,30	-0,28
1980	8452	0,083	0,32	-0,34
1981	8473	0,071	0,45	-0,31
1982	8062	0,076	0,46	-0,40
1983	7703	0,094	0,39	-0,34
1984	8561	0,085	0,36	-0,34
1985	7939	0,083	0,35	-0,26
1986	8713	0,022	0,10	-0,15
1987	6937	0,105	0,38	-0,44
1988	8198	0,123	0,39	-0,46
1989	8429	0,098	0,4	-0,34
1990	7177	0,095	0,44	-0,34
1991	8713	0,022	0,11	-0,12
1992	8719	0,034	0,18	-0,24
1993	8674	0,047	0,28	-0,25
1994	8196	0,064	0,47	-0,36
1995	8701	0,027	0,12	-0,15
1996	6573	0,097	0,49	-0,51
1997	6833	0,135	0,41	-0,51
1998	8659	0,040	0,21	-0,20
1999	7082	0,085	0,38	-0,34
2000	3233	0,097	0,35	-0,29
2001	6498	0,112	0,40	-0,32
2002	4875	0,166	0,56	-0,73
2003	8571	0,081	0,70	-0,55
2004	8451	0,062	0,32	-0,38
2005	8631	0,056	0,27	-0,24
2006	8710	0,043	0,17	-0,15
2007	8710	0,021	0,09	-0,10

Em relação à constituinte M2 foram obtidos os seguintes resultados para a amplitude (em metro) e fase (em grau) e respectivos desvios-padrão. Os valores considerados como *outliers* estão assinalados a vermelho.

Ano	Amplitude (H)	Desvio-padrão	Fase (g)	Desvio-padrão
1970	0,986	0,0024	93,53	0,0024
1971	0,970	0,0010	93,94	0,0010
1972	0,979	0,0011	93,89	0,0011
1973	0,985	0,0013	93,96	0,0013
1974	0,980	0,0004	94,04	0,0004
1975	0,977	0,0005	94,31	0,0005
1976	0,979	0,0005	94,34	0,0006
1977	0,970	0,0006	93,76	0,0006
1978	0,978	0,0004	93,41	0,0004
1979	0,975	0,0005	93,74	0,0005
1980	0,979	0,0012	93,52	0,0013
1981	0,975	0,0011	93,48	0,0011
1982	0,975	0,0012	93,02	0,0012
1983	0,977	0,0015	93,24	0,0015
1984	0,982	0,0013	93	0,0013
1985	0,992	0,0013	93,05	0,0014
1986	0,975	0,0003	93,06	0,0004
1987	0,975	0,0018	93,5	0,0019
1988	1,014	0,0020	93,51	0,0020
1989	1,014	0,0016	93,05	0,0015
1990	1,018	0,0016	93,52	0,0016
1991	1,018	0,0003	93,45	0,0003
1992	1,021	0,0005	93,08	0,0005
1993	1,021	0,0007	93,18	0,0007
1994	1,028	0,0010	93,4	0,0010
1995	1,019	0,0004	92,82	0,0004
1996	1,017	0,0016	92,67	0,0016
1997	1,015	0,0022	93,13	0,0022
1998	1,016	0,0006	92,71	0,0006
1999	1,016	0,0014	93,11	0,0014
2000	1,029	0,0024	92,02	0,0023
2001	1,021	0,0020	93,35	0,0019
2002	1,028	0,0034	94,21	0,0033
2003	1,035	0,0013	92,9	0,0012
2004	1,028	0,0010	92,49	0,0010
2005	1,024	0,0009	93	0,0009
2006	0,993	0,0007	351,88	0,0007
2007	0,991	0,0003	93,34	0,0003

Em relação à constituinte S2 foram obtidos os seguintes resultados para a amplitude (em metro) e fase (em grau) e respectivos desvios-padrão. Os valores considerados como *outliers* estão assinalados a vermelho.

Ano	Amplitude (H)	Desvio-padrão	Fase (g)	Desvio-padrão
1970	1,276	0,4366	56,69	0,3418
1971	0,347	0,0010	121,34	0,0029
1972	0,347	0,0011	121,74	0,0031
1973	0,351	0,0013	121,74	0,0036
1974	0,349	0,0004	119,65	0,0195
1975	0,349	0,0005	121,68	0,0014
1976	0,352	0,0006	121,80	0,0016
1977	0,342	0,0006	120,88	0,0018
1978	0,349	0,0004	120,77	0,0011
1979	0,348	0,0005	120,73	0,0014
1980	0,349	0,0013	120,48	0,0036
1981	0,351	0,0011	120,58	0,0031
1982	0,349	0,0012	120,24	0,0034
1983	0,350	0,0015	120,17	0,0043
1984	0,348	0,0013	119,92	0,0037
1985	0,350	0,0013	120,44	0,0038
1986	0,348	0,0003	120,29	0,0010
1987	0,348	0,0018	120,58	0,0051
1988	0,358	0,0019	120,98	0,0054
1989	0,356	0,0015	120,81	0,0042
1990	0,360	0,0017	121,46	0,0047
1991	0,361	0,0003	121,42	0,0009
1992	0,357	0,0005	121,72	0,0014
1993	0,359	0,0007	121,51	0,0020
1994	0,359	0,0011	121,43	0,0031
1995	0,360	0,0004	120,67	0,0011
1996	0,357	0,0021	121,27	0,0059
1997	0,359	0,0027	120,92	0,0074
1998	0,358	0,0006	120,56	0,0017
1999	0,356	0,0015	121,09	0,0043
2000	0,382	0,0263	120,97	0,0687
2001	0,360	0,0020	120,49	0,0056
2002	0,323	0,0086	119,56	0,0268
2003	0,357	0,0012	119,52	0,0035
2004	0,359	0,0010	119,65	0,0027
2005	0,361	0,0009	120,47	0,0024
2006	0,346	0,0007	120,20	0,0019
2007	0,346	0,0003	120,20	0,0009

## D. Velocidades de $M_2$ e $S_2$

Na tabela seguinte encontramos a velocidade das constantes harmónicas  $M_2$  e  $S_2$  que foram determinadas através da análise espectral. Neste trabalho os valores utilizados, de acordo com Service Hydrographique et Oceanographique de la Marine (1982), foram 28,9841042 °/h para  $M_2$  e 30,0 °/h para  $S_2$ .

Ano	Velocidade retirada do espectro	
	$M_2$	$S_2$
1970	29,02	30
1971	28,97	30
1972	28,98	30
1973	28,97	30
1974	28,97	30
1975	28,97	30
1976	28,98	30
1977	28,97	30
1978	28,97	30
1979	28,97	30
1980	28,98	30
1981	28,97	30
1982	28,97	30
1983	28,99	30
1984	28,98	30
1985	28,97	30
1986	28,97	30
1987	28,99	30
1988	29	30
1989	28,97	30
1990	29	30
1991	28,97	30
1992	28,98	30
1993	28,97	30
1994	28,97	30
1995	28,97	30
1996	28,96	30,02
1997	28,97	29,98
1998	28,97	30
1999	28,97	29,97
2000	28,97	29,99
2001	29	30
2002	28,98	29,96
2003	28,97	30
2004	28,98	30
2005	28,97	30
2006	28,97	30
2007	28,97	30

## E. Ajustamento da série de 2007 com uma falha

Nesta tabela encontram-se os resultados obtidos no ajustamento da série de alturas horárias de maré de 2007 à qual removemos a observação de 19 de Fevereiro às 0 h.

E. M. Q. do ajustamento	0,43			
Resíduo máximo	0,17			
Resíduo mínimo	-0,15			
	H [m]	Desvio padrão	g [°]	Desvio padrão
M <sub>2</sub>	0,991	0,0007	93,34	0,0007
S <sub>2</sub>	0,346	0,0007	120,20	0,0019

## F. Ajustamento de uma série com 50 dias de 2007

Nesta tabela encontram-se os resultados obtidos no ajustamento da série de alturas horárias de maré dos primeiros 50 dias de 2007.

E. M. Q. do ajustamento	0,27			
Resíduo máximo	0,07			
Resíduo mínimo	-0,10			
	H [m]	Desvio padrão	g [°]	Desvio padrão
M <sub>2</sub>	0,994	0,0013	93,55	0,0013
S <sub>2</sub>	4,562	0,7577	193,05	0,1684